

定常電流による磁場 No. 3 - 静磁場のアンペールの法則と湧出し源 -

The Author

August 26, 2021

Contents

1	ベクトル物理量とベクトルの積演算	https://seidenba.blog.ss-blog.jp/2021-08-06 アップした内容	2
1.1	力のモーメント (torque) と角運動量 (angular momentum)		2
1.1.1	力のモーメント (torque)	https://physicsreport123.up.seesaa.net/image/E38399E382AFE38388E383ABE789A9E79086E9878FE381A	2
1.1.2	角運動量 (angular momentum)	8E38399E382AFE38388E383ABE381AEE7A98DE6BC94E7AE97.pdf にPDFファイルがアップ	3
1.2	電流と磁場ベクトル		7
1.2.1	ベクトルの積		7
1.2.2	観測位置と原因位置の観点から見たビオ・サバルの法則と力のモーメント		10

2	磁場の線積分	今回の内容	11
2.1	多変数関数の微分		11
2.2	ベクトル場の線積分		12
2.2.1	線積分と線素ベクトル		12
2.2.2	ベクトル場の閉曲線積分		13

3	微小定常電流が作る磁場の特徴		16
3.1	アンペールの法則の導出		16
3.2	磁場の湧き出し源		16
4	ローレンツ力		16
4.1	電流から電荷への記述 ; ローレンツ力		16
4.2	(コラム) 磁荷と電荷		16

今後の予定

2 磁場の線積分

2.1 多変数関数の微分

y は x の値によって決まる関数 $y = f(x)$ は、 (x, y) の二変数関数に見えますが、 x は独立変数と y は従属変数と言われ、種類の異なる変数です。すなわち、 $y = f(x)$ は 1 つの独立変数によって 1 つの従属変数の値が決定する関数で、このような関数は正確には一変数関数 $y = f(x)$ と言います。

次に、 x, y の値によって決まる関数 $z = \gamma(x, y)$ は、 x, y は独立変数、 z が従属変数であり、このような関数を二変数関数 $z = \gamma(x, y)$ と言います。この場合、独立変数 x, y は平面座標上の位置 (x, y) で、変数 z は三次元座標の z 軸の値として割り当てられることも多いですが、それはほんの一例ですので、定義された変数を正確に吟味する習慣を身につけましょう。

独立変数が 2 つ以上の関数を一般に多変数関数と呼びます。

さて、一変数関数 $y = f(x)$ の微小区間での変化の割合を表す微分関数は、独立変数は x の 1 つだけなので、

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \quad (20)$$

と一義的に与えられます。

= は、要りません。

では、多変数関数の場合はどのように定義されていくのかを、二変数関数 $z = \gamma(x, y)$ を例にとって説明します。なお、この部分は、https://mathematical.jp/black_scholes/total_differential.html を参考にしましたので（深謝）、わからなければそちらをご覧ください。

この場合、独立変数 x, y のどちらを微量動かすかにより、つまり変数ごとに $z = \gamma(x, y)$ の変化量が異なることは容易に想像がつくことでしょう。このため、多変数関数の微分関数は一変数関数 $y = f(x)$ のように一義的には決定できません。このため、以下に書き出した 3 つの微分量

(一) x を微量変化させた時に得られる $z = \gamma(x, y)$ の 変化量の割合 を x の偏微分 $\frac{\delta\gamma(x, y)}{\delta x}$

(二) y を微量変化させた時に得られる $z = \gamma(x, y)$ の 変化量の割合 を y の偏微分 $\frac{\delta\gamma(x, y)}{\delta y}$

(三) x, y を同時に微量変化させた時に得られる $z = \gamma(x, y)$ の 変化量 を全微分 $\Delta\gamma(x, y)$

を定義します。これが多変数関数の微分量の基礎となります。

前述した通り、多変数関数の従属変数（独立変数によって返される値）が何を与えるのかは、その関数を作る用途によって様々です。また、独立変数が (x, y) の場合を考えていましたが、もちろん、曲座標 (r, θ) のでも構いません。

ここで、二次元閉曲線 $\Gamma = (x_\gamma, y_\gamma)$ を考えましょう。変数 x_γ, y_γ は曲座標 $(r_\gamma, \theta_\gamma)$ を独立変数として決定される従属変数とし、 $x_\gamma = (r_\gamma, \theta_\gamma)$, $y_\gamma = (r_\gamma, \theta_\gamma)$ と与えられるとします。ここで、

$$x_\gamma(r_\gamma, \theta_\gamma) = r_\gamma \cos \theta_\gamma, \quad (21)$$

$$y_\gamma(r_\gamma, \theta_\gamma) = r_\gamma \sin \theta_\gamma, \quad (22)$$

と与えられるとします。

この時、 $x_\gamma(r, \theta)$ 関数の (一)~(三) の微分量は、それぞれ、

$$\frac{\delta x_\gamma(r_\gamma, \theta_\gamma)}{\delta r} = \cos \theta_\gamma, \quad (23)$$

$$\frac{\delta x_\gamma(r_\gamma, \theta_\gamma)}{\delta \theta} = -r_\gamma \sin \theta_\gamma, \quad (24)$$

$$dx_\gamma = \frac{\delta x_\gamma(r_\gamma, \theta_\gamma)}{\delta r} r_\gamma + \frac{\delta x_\gamma(r, \theta)}{\delta \theta_\gamma} d\theta_\gamma = \cos \theta_\gamma dr_\gamma - r \sin \theta_\gamma d\theta_\gamma, \quad (25)$$

となります。

同様に、 y_γ 関数についても (一)~(三) の微分量は、それぞれ、

$$\frac{\delta y_\gamma(r_\gamma, \theta_\gamma)}{\delta r_\gamma} = \sin \theta_\gamma, \quad (26)$$

$$\frac{\delta y_\gamma(r_\gamma, \theta_\gamma)}{\delta \theta_\gamma} = r_\gamma \cos \theta_\gamma, \quad (27)$$

$$dy_\gamma = \frac{\delta y_\gamma(r, \theta)}{\delta r} dr_\gamma + \frac{\delta y_\gamma(r_\gamma, \theta_\gamma)}{\delta \theta_\gamma} d\theta_\gamma = \sin \theta_\gamma dr_\gamma + r_\gamma \cos \theta_\gamma d\theta_\gamma, \quad (28)$$

となります。

この閉曲線 Γ 上の $(x_\gamma(r_\gamma, \theta_\gamma), y_\gamma(r_\gamma, \theta_\gamma)) \sim (x_\gamma(r_\gamma, \theta_\gamma) + dx_\gamma, y_\gamma(r_\gamma, \theta_\gamma) + dy_\gamma)$ の線素 (線分) ベクトル ds_γ は、式 (25) と式 (28) より、

$$ds_\gamma = (dx_\gamma, dy_\gamma) = (\cos \theta_\gamma dr_\gamma - r_\gamma \sin \theta_\gamma d\theta_\gamma, \sin \theta_\gamma dr_\gamma + r_\gamma \cos \theta_\gamma d\theta_\gamma). \quad (29)$$

この閉曲線 Γ 上の点 $(x_\gamma(r_\gamma, \theta_\gamma), y_\gamma(r_\gamma, \theta_\gamma))$ の接線の傾き $\frac{dy_\gamma(r_\gamma, \theta_\gamma)}{dx_\gamma(r_\gamma, \theta_\gamma)}$ は、

$$\frac{dy_\gamma(r_\gamma, \theta_\gamma)}{dx_\gamma(r_\gamma, \theta_\gamma)} = \frac{\sin \theta_\gamma dr_\gamma + r_\gamma \cos \theta_\gamma d\theta_\gamma}{\cos \theta_\gamma dr_\gamma - r_\gamma \sin \theta_\gamma d\theta_\gamma}, \quad (30)$$

となります。

2.2 ベクトル場の線積分

2.2.1 線積分と線素ベクトル

xy 平面上にベクトル場 $\mathbf{B} = \mathbf{B}(x, y)$ と曲線 C があります。曲線 C を n 分割してできた曲線 C の k 番目の区間の線分ベクトル $\Delta \mathbf{s}_k$ とベクトル場 $\mathbf{B}(x_k, y_k)$ の内積を全ての区間で足し合わせます。さらに $n \rightarrow \infty$ とした積分値は、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \mathbf{B}(x_k, y_k) \cdot \Delta \mathbf{s}_k = \int_C \mathbf{B}(x, y) \cdot ds, \quad (31)$$

と記述できます。この積分値は、ベクトル場 \mathbf{B} の曲線 C に沿う線積分もしくは経路積分と呼ばれます。なお、 $\Delta \mathbf{s}_k$ を線分ベクトルと表現しましたが、積分記号内では極限的な微小区間を意味する ds としました。 ds を曲線 C の線素ベクトルと呼びます。

【例題 4】

ベクトル場によって与えられる量がある物体にかかる力であった場合、このベクトル場の曲線 C に沿う線積分値が表す物理量は何ですか。

(解) 力×距離は仕事となるので、このベクトル場の中でこの物体を曲線 C に沿って準静的に動かした場合に

必要な仕事となります。

2.2.2 ベクトル場の閉曲線積分

次に曲線 C が Fig. 7 のような連続な閉曲線 Γ で与えられる時、これに沿うベクトル場 \mathbf{B} の線（経路）積分（ $= K$ ）を計算します。閉曲線の積分（進行）方向は紙面裏から表へ向かう向きに対して右ねじの方向とします。閉曲線 Γ 上のある点 $\mathbf{r}_\gamma = (x_\gamma(r, \theta), y_\gamma(r, \theta))$ での線素ベクトルを ds_γ 、ベクトル場を $\mathbf{B}_\gamma = (B_{x_\gamma}, B_{y_\gamma})$ と記します。以上より、

$$K = \oint_{\Gamma} \mathbf{B}_\gamma \cdot ds_\gamma \quad (32)$$

ここで、線素ベクトルを与える式 (29) を使って、

$$K = \oint_{\Gamma} (B_{x_\gamma}, B_{y_\gamma}) \cdot (\cos \theta dr - r \sin \theta d\theta, \sin \theta dr + r \cos \theta d\theta) \quad (33)$$

$$= \oint_{\Gamma} \{ (B_{x_\gamma} \cos \theta + B_{y_\gamma} \sin \theta) dr - r (B_{x_\gamma} \sin \theta - B_{y_\gamma} \cos \theta) d\theta \} \quad (34)$$

$$= \oint_{\Gamma} (B_{x_\gamma} \cos \theta + B_{y_\gamma} \sin \theta) dr - \oint_{\Gamma} r (B_{x_\gamma} \sin \theta - B_{y_\gamma} \cos \theta) d\theta \quad (35)$$

と与えられ、曲座標を用いることにより、閉曲線積分が動径方向 r と角度方向 θ の変数積分に分割して計算で

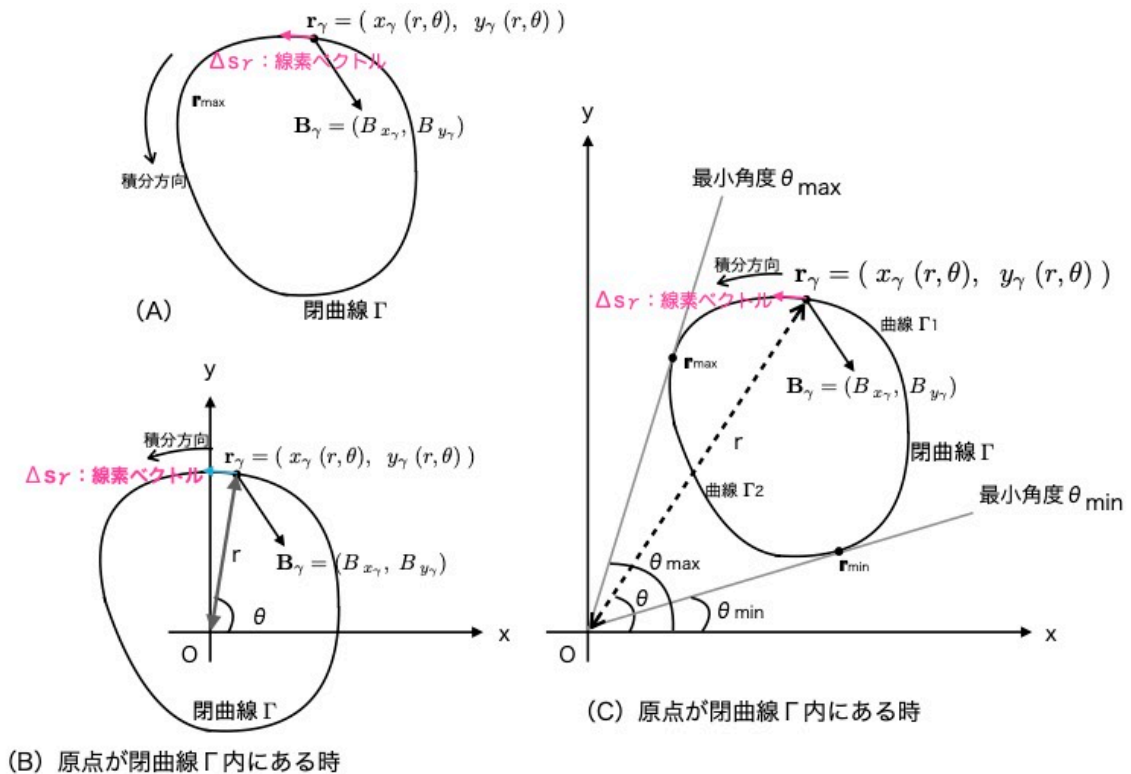


Figure 7: 閉曲線 Γ と原点

きることがわかります。

もし、原点を閉曲線 Γ 内に設定したならば (Fig. 7 B)、式 (35) によりベクトル場の閉曲線 Γ に沿った積分が計算できます。

また、原点を閉曲線 Γ 外に設定したならば (Fig. 7 C)、角度成分 θ の重複を回避するために、Fig. 7(C) に記したように、閉曲線 Γ を、

- ・ 「最小角 θ_{\min} の位置 \mathbf{r}_{\min} 」と「最大角 θ_{\max} の位置 \mathbf{r}_{\max} 」で分割
- ・ 位置 \mathbf{r}_{\min} から \mathbf{r}_{\max} の部分を曲線 Γ_1
- ・ 位置 \mathbf{r}_{\max} から位置 \mathbf{r}_{\min} の部分を曲線 Γ_2

とします。以上を式 (32) に当てはめると、

$$K = \oint_{\Gamma} \mathbf{B}_{\gamma} \cdot d\mathbf{s}_{\gamma} = \int_{\Gamma_1} \mathbf{B}_{\gamma} \cdot d\mathbf{s}_{\gamma} + \int_{\Gamma_2} \mathbf{B}_{\gamma} \cdot d\mathbf{s}_{\gamma}, \quad (36)$$

さらに、式 (35) に当てはめるために、積分区間を考察します。

\mathbf{r}_{\min} と \mathbf{r}_{\max} は、 $\begin{cases} \mathbf{r}_{\min} = (r_{\min}, \theta_{\min}) \\ \mathbf{r}_{\max} = (r_{\max}, \theta_{\max}) \end{cases}$ と曲座標表示ができるので式 (35) は、

$$K = \int_{r_{\min \text{ on } \Gamma_1}^{r_{\max}} (B_{x_{\gamma}} \cos \theta + B_{y_{\gamma}} \sin \theta) dr + \int_{r_{\max \text{ on } \Gamma_2}^{r_{\min}} (B_{x_{\gamma}} \cos \theta + B_{y_{\gamma}} \sin \theta) dr - \left\{ \int_{\theta_{\min \text{ on } \Gamma_1}^{\theta_{\max}} r(B_{x_{\gamma}} \sin \theta - B_{y_{\gamma}} \cos \theta) d\theta + \int_{\theta_{\max \text{ on } \Gamma_2}^{\theta_{\min}} r(B_{x_{\gamma}} \sin \theta - B_{y_{\gamma}} \cos \theta) d\theta \right\}, \quad (37)$$

となります。つまり、式 (37) が閉曲線 Γ の外に原点がある場合のベクトル場の閉曲線 Γ に沿った積分値の計算式となります。

【例題 5】

Fig. 7 (B) と (C) において、 z 軸正の方向に直線定常電流 \mathbf{I} [A] (大きさ I [A]) が流れた場合、この電流の作る磁場ベクトル \mathbf{B} の閉曲線 Γ (連続な閉曲線) に沿った線積分値 K を計算してください。そして、最後に計算結果から物理的な論述を 500 字程度で記してください。

(解) この定常電流 \mathbf{I} は Fig. 7 の原点の紙面裏から表に向かって流れていると考えられます。

この定常電流 \mathbf{I} が作る磁場ベクトル \mathbf{B} は、「定常電流による磁場 No. 1」の § 5-1 の式 (88), (89) より、曲座標表示で表せば、

$$\mathbf{B}(r, \theta) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} (-\sin \theta, \cos \theta, 0), \quad (38)$$

となります。

Fig. 7 (B) の場合は 式 (35) を使用し、(B) の場合は 式 (37) を使用し、

$$B_{x_{\gamma}} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi r} \sin \theta, \quad (39)$$

$$B_{y_{\gamma}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \cos \theta, \quad (40)$$

を代入して計算を行います。

(B) の場合

$$K = \oint_{\Gamma} \left(-\frac{\mu_0 I}{2\pi r} \sin \theta \cos \theta + \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \cos \theta \sin \theta \right) dr - \oint_{\Gamma} r \left(-\frac{\mu_0 I}{2\pi r} \sin \theta \sin \theta - \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \cos \theta \cos \theta \right) d\theta \quad (41)$$

$$= \oint_{\Gamma} 0 dr - \frac{\mu_0 I}{2\pi} \oint_{\Gamma} (-\sin \theta \sin \theta - \cos \theta \cos \theta) d\theta = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta = \underline{\mu_0 I}. \quad (42)$$

(C) の場合

$$\begin{aligned}
 K &= \int_{r_{\min \text{ on } \Gamma_1}}^{r_{\max}} \left(-\frac{\mu_0 I}{2\pi r} \sin \theta \cos \theta + \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \cos \theta \sin \theta \right) dr + \int_{r_{\max \text{ on } \Gamma_2}}^{r_{\min}} \left(-\frac{\mu_0 I}{2\pi r} \sin \theta \cos \theta + \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \cos \theta \sin \theta \right) dr \\
 &\quad - \left\{ \int_{\theta_{\min \text{ on } \Gamma_1}}^{\theta_{\max}} r \left(-\frac{\mu_0 I}{2\pi r} \sin \theta \sin \theta - \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \cos \theta \cos \theta \right) d\theta + \int_{\theta_{\max \text{ on } \Gamma_2}}^{\theta_{\min}} r \left(-\frac{\mu_0 I}{2\pi r} \sin \theta \sin \theta - \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \cos \theta \cos \theta \right) d\theta \right\} \\
 &= \int_{r_{\min \text{ on } \Gamma_1}}^{r_{\max}} 0 dr + \int_{r_{\max \text{ on } \Gamma_2}}^{r_{\min}} 0 dr + \int_{\theta_{\min \text{ on } \Gamma_1}}^{\theta_{\max}} \frac{\mu_0 I}{2\pi} d\theta + \int_{\theta_{\max \text{ on } \Gamma_2}}^{\theta_{\min}} \frac{\mu_0 I}{2\pi} d\theta \\
 &= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left([\theta]_{\theta_{\min \text{ on } \Gamma_1}}^{\theta_{\max}} + [\theta]_{\theta_{\max \text{ on } \Gamma_2}}^{\theta_{\min}} \right) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\theta_{\max} - \theta_{\min} + \theta_{\min} - \theta_{\max} \right) = \underline{0}. \tag{43}
 \end{aligned}$$

論述回答

(B) と (C) に共通して言えることは、閉曲線 Γ は定常電流に垂直な面内にある任意の連続な閉曲線という設定ゆえ、閉曲線の形には依存しない ことがわかります。

(B) の場合は閉曲線 Γ 内を電流が流れている場合です。この算出で電流を原点に設置しました。もし閉曲線 Γ 内を 2 本の定常電流 I_1, I_2 が流れているならば、閉曲線 Γ 内を上の方の点における磁場ベクトルはそれぞれの電流が作るその和になります。したがって、それぞれの電流を原点として閉曲線 Γ に沿った各磁場の閉曲線積分値を求め、単純に和を取れば良いこととなります。つまり、この 2 本の定常電流が作る磁場の閉曲線 Γ に沿った線積分値は $\mu_0(I_1 + I_2)$ となります。この議論を広げれば、平面上にある任意の閉曲線 Γ の内側を垂直に定常電流 I_1, I_2, \dots, I_n が流れた場合、全ての電流によって作られる磁場の閉曲線 Γ に沿う線積分値は $\mu_0 \sum_{k=1}^n I_k$ となります。

(C) の場合は、(B) の議論の延長で閉曲線内を垂直に定常電流が貫いていないので、たとえ閉曲線 Γ 上で磁場を観測したとしても、閉曲線 Γ に沿う線積分値は 0 になることを示しています。

(補足) 角ばった閉曲線 (正方形等) は滑らかとは言えませんが、連続ではあります。つまり、連続な閉曲線と滑らかな閉曲線は厳密には異なります。しかし、角ばっていても丸みを帯びていても、今回の磁場の閉曲線積分値に関しては、なんら異なる結果はありません。

しかし、積分経路に電流が通っていた場合、その積分経路は連続とは言えなくなります。電流が通っている場所とそうでない場所は、異なる空間と考えることが必要だからです。

「空間が連続である」と「滑らかな閉曲線」や「連続な閉曲線」は本質的に異なることを確認してください。

3 微小定常電流が作る磁場の特徴

このテキストは、あくまでも定常電流が作る静磁場について議論をします。静磁場の最後のこの章はこれまでの総括を含みなおかつ計算も多くなりましたが、時間変動する電磁場への足掛かりとしてとても大切です。しっかりと計算過程も追って行ってください。次のテキストから、いよいよ時間変動がある電流による磁場について議論を進める予定です。

3.1 アンペールの法則の導出

微小電流が作る磁場の閉曲線積分

3.2 磁場の湧き出し源

微小電流が作る磁場の発散

4 ローレンツ力

4.1 電流から電荷への記述；ローレンツ力

4.2 (コラム) 磁荷と電荷