

# 定常電流による磁場 No. 3-磁場の線積分とアンペールの法則-

The Author

August 6, 2021

## Contents

今回テキスト

<b>1</b>	<b>ベクトル物理量とベクトルの積演算</b>	<b>2</b>
1.1	力のモーメント (torque) と角運動量 (angular momentum) . . . . .	2
1.1.1	力のモーメント (torque) . . . . .	2
1.1.2	角運動量 (angular momentum) . . . . .	3
1.2	電流と磁場ベクトル . . . . .	7
1.2.1	ベクトルの積 . . . . .	7
1.2.2	観測位置と原因位置の観点から見たビオ・サバールの法則と力のモーメント . . . . .	10

未着手部分

<b>2</b>	<b>磁場の線積分</b>	<b>11</b>
2.1	多変数関数の微分 . . . . .	11
2.2	ベクトル場の線積分 . . . . .	12
2.2.1	線積分と線素ベクトル . . . . .	12
2.2.2	原点を含まない閉曲線の線積分 . . . . .	12
2.2.3	原点を含む閉曲線の線積分 . . . . .	13
2.3	磁場ベクトル $\mathbf{B}$ の経路積分 . . . . .	14
<b>3</b>	<b>アンペールの法則</b>	<b>15</b>
3.1	ストークスの定理の再考 . . . . .	15
3.2	アンペールの法則 . . . . .	15

# 1 ベクトル物理量とベクトルの積演算

## 1.1 力のモーメント (torque) と角運動量 (angular momentum)

### 1.1.1 力のモーメント (torque)

Fig. 1 に示したように、原点  $O$  を設定し、運動している質点  $M$  ( $m$  [Kg]) のある時刻  $t$  における物理量を下記のように表します。

質点  $M$  の位置： 点  $R$   $\mathbf{r}$

作用する力：  $\mathbf{F}(t)$  [N]

速度：  $\mathbf{v}(t)$  [m/s]

運動量：  $\mathbf{p}(t) = m\mathbf{v}(t)$  [m/s]

力のモーメント (torque)：  $\mathbf{N}(t)$  [Nm]

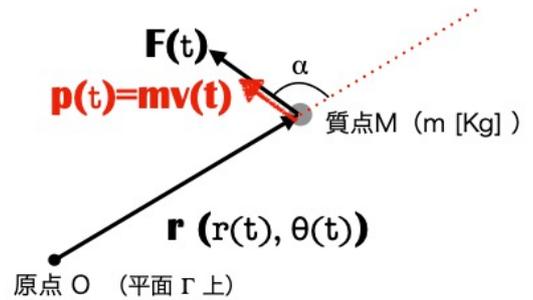


Figure 1: 質点  $M$  のジオメトリー

質点  $M$  の原点  $O$  に関する力のモーメントは、

$$\mathbf{N}(t) = \mathbf{r}(r(t), \theta(t)) \times \mathbf{F}(t), \quad (1)$$

ただし、 $\times$  は外積を表します。

式(1)では、原点  $O$  を基準点とし質点  $M$  の位置を  $\mathbf{r} = \overrightarrow{OR}$  で計算したため、原点  $O$  を基準点とした力のモーメントが計算されました。他の点 (例えば点  $U$ ) を基準に力のモーメントを計算する場合は  $\mathbf{r} = \overrightarrow{UR} \times \mathbf{F}(t)$  となります。すなわち、力のモーメントは基準点依存量であることがわかります。では、

#### 考察 1

力のモーメントの基準点はまったく任意にとって構わないのか？  
力のモーメント  $\mathbf{N}$  の起点はどこか？

について詳しく考察しましょう。

このために、Fig.2 に示した星のオブジェを固定したおもちゃで考えてみましょう。鉛直方向に立てられた回転軸を回せば星が水平面を円の軌跡を描きながらくるくる回る構造ですが、星を固定する棒 (固定棒) の回転軸に対する角度 ( $\alpha$ ) が以下の二通りの場合を考えましょう。星の位置を  $R$  とします。星を固定する棒の質量は無視できるものとします。

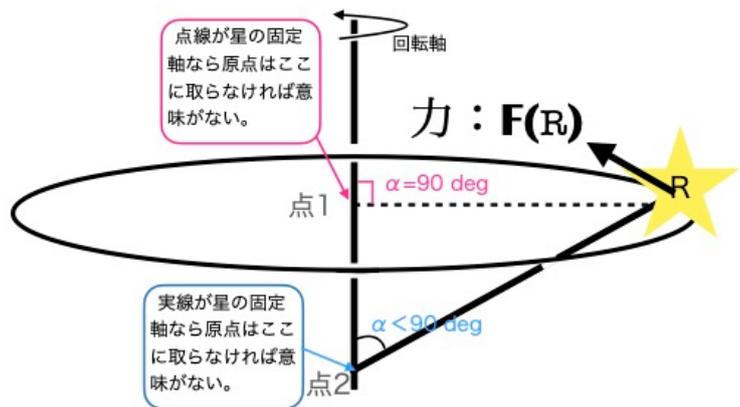


Figure 2: 星をくるくる回すおもちゃ

(1) 点線 星の回転面と同一面上になるように固定棒を固定する場合；  $\alpha = 90$  [deg]

(2) 実線 星の回転面よりも固定棒と回転軸の固定位置が下に来る場合；  $\alpha < 90$  [deg]

#### (1) 点線

この時、点  $1$  と星は連結されているため、物理的に点  $1$  以外に力のモーメントの基準点は考えられないです。

数学的には基準点は任意になるとしましたが、これは数学上の話です。点 1 を原点 O、星の位置を  $R$ 、星に作用する力を  $\mathbf{F}_R$  とすると、発生するトルク  $\mathbf{N}^{\text{点}1}$  は、

$$\mathbf{N}^{\text{点}1} = \overrightarrow{OR} \times \mathbf{F}_R, \quad (2)$$

$\mathbf{F}_R$  の下付け文字  $R$  はベクトルの起点を表します。また、トルク  $\mathbf{N}^{\text{点}1}$  の向きは回転軸と同じ方向です。

式 (2) の右辺は、位置ベクトル  $\overrightarrow{OR}$  の終点の星 ( $\mathbf{r}$ ) を起点とした力  $\mathbf{F}_R$  が作用する系の状況を記述しています。他方、式 (2) の左辺はこの設定された状況で生じるトルク  $\mathbf{N}^{\text{点}1}$  が算出されることを意味しています。この系では設定された場所は「原点 O (点 1)」と「点 R」のみです。では、算出されるトルク  $\mathbf{N}^{\text{点}1}$  の起点は「原点 O (点 1)」と「点 R」のどちらかになるのか、それとも別のどこかになるのか。理学系の人はこの問いに対して曖昧な方も少なからずいらっしゃると思いますが、機械工学の方々はこの系の力のモーメントの起点が点 1 であることは周知の事実でしょう。連結棒で繋いだ終点の星に回転を起こさせる元は回転軸に接合された点 1 「原点 O」にあると考えられ、この元を力のモーメント  $\mathbf{N}^{\text{点}1}$  と考えるのです。したがって、本テキストでは、式 (2) を、

$$\mathbf{N}_O^{\text{点}1} = \overrightarrow{OR} \times \mathbf{F}_R, \quad (3)$$

と記述します。

もし、点 1 を中心に回転している星を点 2 から観測者が観測し基準点 2 による星の力のモーメントを算出しても、この量は見かけ上のもので実態がありません。

## (2) 実線

点 2 と星は固定棒で連結されているため、力のモーメントを考える基準点は点 2 以外は物理的に無意味です。点 2 を原点 O、星の位置を  $R$ 、星に作用する力を  $\mathbf{F}_R$  とすると、発生するトルク  $\mathbf{N}_O^{\text{点}2}$  は、

$$\mathbf{N}_O^{\text{点}2} = \overrightarrow{OR} \times \mathbf{F}_R, \quad (4)$$

となります。トルク  $\mathbf{N}_O^{\text{点}2}$  の起点は点 2 で、この向きは回転軸を角度  $\pi/2 - \alpha$  だけ倒した向きになります (後述の外積計算を参照)。

### 考察 1 の結論

以上より、(1)、(2) の場合、力のモーメントの考察において

- ・ 力のモーメントは基準点依存量であって、物理的に適切な基準点で算出しなければ実態のない量となる。
- ・ 物理的に適切な基準点は、回転軸上にある固定された点 (点 1 と点 2) で、系の回転において固定点とも言える。
- ・ 力のモーメントは基準点に依存するベクトル量で、この起点は算出に使用した基準点となる位置ベクトルとなる。

がわかりました。

### 1.1.2 角運動量 (angular momentum)

Fig. 1 の質点 M において角運動量  $\mathbf{p}_\omega(t)$  は、

$$\mathbf{p}_\omega(t) = \mathbf{r}(r(t), \theta(t)) \times \mathbf{p}(t) = \mathbf{r}(r(t), \theta(t)) \times m\mathbf{v}(t), \quad (5)$$

と定義されます。角運動量も基準点に依存する位置ベクトル量で、基準点（この場合は原点 O）依存量であることに注意しましょう。ですから、角運動量についても Fig. 2 の星をぐるぐる回すおもちゃの考察 1 と同様な考察と同じ結論が得られます。

考察 2 と結論

角運動量  $\mathbf{p}_\omega$  の基準点はどこか？  
物理量としての角運動量  $\mathbf{p}_\omega$  の起点はどこか？

- 角運動量は、物理的に適切な基準点を決定して算出すべき基準点に依存するベクトル量で、この起点は算出に使用した基準点となり、位置ベクトルとなる。
- 物理的に適切な基準点とは、回転軸上にある固定点で系の回転における固定点と言える。
- 以上から、力のモーメントと角運動量の基準点は同一になる。

角運動量を時間で微分しましょう。

$$\frac{d\mathbf{p}_\omega(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\{\vec{OR} \times \mathbf{p}(t)\} = \frac{d\vec{OR}}{dt} \times \mathbf{p}(t) + \vec{OR} \times \frac{d\mathbf{p}(t)}{dt}. \quad (6)$$

$$\begin{cases} \frac{d\vec{OR}}{dt} = \mathbf{v}(t) // \mathbf{p}(t) \Rightarrow \frac{d\vec{OR}}{dt} \times \mathbf{p}(t) = 0 \\ \frac{d\mathbf{p}(t)}{dt} = m \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = m\mathbf{a}(t) = \mathbf{F}(t) \end{cases}. \quad (7)$$

式 (7) を式 (6) に適応すると、

$$\frac{d\mathbf{p}_\omega(t)}{dt} = \mathbf{N}(t), \quad (8)$$

つまり、角運動量  $\mathbf{p}_\omega(t)$  を時間微分すれば力のモーメント  $\mathbf{N}(t)$  が得られることが示されました。また、式 (7) の第 2 式より、

$$\frac{d\mathbf{p}(t)}{dt} = \mathbf{F}(t), \quad (9)$$

式 (8) と式 (9) の特徴を見ていきます。

式 (8) と式 (9) は構造が似ている運動方程式になりました。両者の運動方程式の特徴をまとめます。

式 (8)： 物体の運動をある基準点の回りの回転運動としてとらえる角運動量微分方程式  
(以後、 $N - \ell$  運動方程式と記述)。

式 (9)： 物体の運動を運動量と位置と質量で記述した運動量微分方程式  
(以後、 $F - p$  運動方程式と記述)

さらに、式 (9) では、運動量  $\mathbf{p}$  の時間微分は力になるため、力の時間積分量が運動量の変化量をあたえることを示しています。時刻  $[t_1 t_2]$  の間で力  $\mathbf{F}(t)$  を積分すると、

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}(t) dt = \mathbf{p}(t_2) - \mathbf{p}(t_1), \quad (10)$$

となります。

式 (10) の左辺は力積（力×時間）ですから、物体の運動量の変化は、その間に物体に作用した力積となる。

という運動量－力積の法則に帰されます。この法則に構造がよく似ている力学の法則が物体の力学的エネルギーと仕事の法則（以後、 $K - W$  法則と記述。エネルギー保存則も含まれます。）で、“物体の力学的エネルギー（ $K$ ）の変化は、その間に物体に作用した仕事（ $W$ ）になる。”つまり、

$$\int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = K(\mathbf{r}_2) - K(\mathbf{r}_1), \quad (11)$$

です。

一般的な力学的知識を加味して  $N - \ell$  と  $F - p$  運動方程式をまとめます。

$N - \ell$  と  $F - p$  の運動方程式のまとめ

- 1 ある物体の運動を観測して 基準点となる回転の固定点が見出せれば (ex. 等速円運動、回転体運動)、
  - 1-1  $N - \ell$  運動方程式 (8) がメイン運動方程式と言える。
  - 1-2  $F - p$  運動方程式 (9) によって運動量保存則などの議論も有効
  - 1-2  $K - W$  法則 (11) によってエネルギーの議論は有効
- 2 ある物体の運動を観測して 基準点となる回転の固定点が見出せなければ (ex. 重力中の物体の運動、静電場中の電荷の運動、単振り子<sup>a</sup>)、
  - 2-1  $F - p$  運動方程式 (9) を使用して物体の運動を解析する。
  - 2-2  $K - W$  法則 (11) によってエネルギーの議論は有効
- 3  $K - W$  法則 (11) は、エネルギー保存則を表す式なので、1、2 のどちらの運動にも有効となる。

<sup>a</sup>単振り子は回転の中心と軌道と周期があるように見えますが、回転ではなくただの周期運動ですのでこちら側で解析を行います。注意してください。

#### 例題 1

力のモーメントおよび角運動量の計算に際して、回転系の固定点を基準点に置くべきであると判明しましたが、太陽の周りを公転する地球の回転運動の基準点について考察してください。

(解) 太陽の周りを公転する地球が回転運動です。この場合、機械やおもちゃのように明らかな固定点はありませんが、太陽と地球に働く万有引力が地球の公転を引き起こす原因です。言い換えると、太陽の中心力場で地球が公転（回転）運動しています。よって、地球の公転は太陽が固定点となる回転と考えることができます。

(補足) 地球の公転軌道は円軌道ではなく、少し楕円になっていますが、太陽はこの楕円の焦点の一つです。また、中心力場の公転（回転）運動の特徴としては、面積速度一定の法則がありますが、これは地球にかかる力は太陽との万有引力のみなので、軌道方向にかかる力の成分が 0 となり、式 (8) から角運動量の時間変化が常に 0 となるからです。

#### 例題 2

放物運動の物体の解析では、 $N - \ell$  運動方程式 (8) か  $F - p$  運動方程式 (9) のどちらを使用して解析すべきでしょうか？理由もつけて教えてください。

放物運動の物体は、実際に物体の運動は回転を成さないのので、 $F - p$  運動方程式 (9) を使用し解析を行います。

例題3 角速度と慣性モーメントと角運動量の計算

回転の中心から質点 M の距離が常に一定である回転運動 (Fig.3) について、次の設問 (1) ~ (3) に沿って考えますので答えてください。

(1) 下記の文章を読んで、空欄を適切に埋めてください。

最も初歩的な回転運動は、半径  $r$  (一定)、速度  $\mathbf{v}(t)$  (大きさ  $v$  一定) の等速円運動です。等速円運動の場合、角速度  $\omega$  は回転中心で定義され、 $v, r, \omega$  との関係は、

$$\omega = \boxed{\text{(a)}} \cdots \text{(あ)}$$

で表されました。 $\omega$  は軌道円がある平面内で軌道中心角の時間変化を表す量と考えますので  $\boxed{\text{(b)}}$  量と考えてきました。しかし、Fig. 3 において三次元で回転運動を記述する場合は、角

速度は大きさが中心角の時間変化で、大きさが回転軸の方向を持つ  $\boxed{\text{(c)}}$  量  $\vec{\omega}$  として再定義します。

この場合、式 (あ) は、

$$\vec{\omega} = \frac{1}{r^2} \mathbf{r} \times \mathbf{v}, \cdots \text{(い)}$$

と書き換えられます。

式 (い) の両辺の右側に  $\times \mathbf{r}$  を作用させベクトル三重積の公式を当てはめると (ただし、 $\tilde{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/r$  とします。)

$$\begin{aligned} \vec{\omega} \times \mathbf{r} &= \frac{1}{r^2} \mathbf{r} \times \mathbf{v} \times \mathbf{r} = \tilde{\mathbf{r}} \times \mathbf{v} \times \tilde{\mathbf{r}} \\ &= \boxed{\text{(d)}} \\ &= \mathbf{v} - (\tilde{\mathbf{r}} \times \mathbf{v})\tilde{\mathbf{r}}, \cdots \text{(う)} \end{aligned}$$

ここで、式 (う) の第 2 項の  $(\tilde{\mathbf{r}} \times \mathbf{v})$  は速度の動径方向成分を表わしますが、等速円運動の場合では動径方向の速度は  $\boxed{\text{(e)}}$  となります。つまり質点 M の回転運動で回転の固定点から質点 M の距離が常に一定な場合 (含 等速円運動)、

$$\mathbf{v} = \vec{\omega} \times \mathbf{r}, \cdots \text{(え)}$$

という関係が成り立ちます。

(2) Fig.3 の角運動量  $\mathbf{p}_\omega$  を  $\mathbf{r}$ 、 $\vec{\omega}$  と  $m$  で表してください。

(3)  $\mathbf{r} = (x, y, z)$ 、 $\vec{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$  として、一般的な角運動量  $\mathbf{p}_\omega$  の成分を計算してください。

(解)

(1)  $\boxed{\text{a: } \frac{v}{r}}$ 、 $\boxed{\text{b: スカラー}}$ 、 $\boxed{\text{c: ベクトル}}$ 、 $\boxed{\text{d: } (\tilde{\mathbf{r}} \times \tilde{\mathbf{r}})\mathbf{v} - (\tilde{\mathbf{r}} \times \mathbf{v})\tilde{\mathbf{r}}}$ 、 $\boxed{\text{e: } 0}$

(2)

$$\mathbf{p}_\omega = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \mathbf{r} \times \mathbf{v} = m \mathbf{r} \times \vec{\omega} \times \mathbf{r}. \quad (12)$$

第 3 式から第 4 式で、式 (え) を代入しました。

(3) この設問に関しては縦ベクトル表記を使用します。

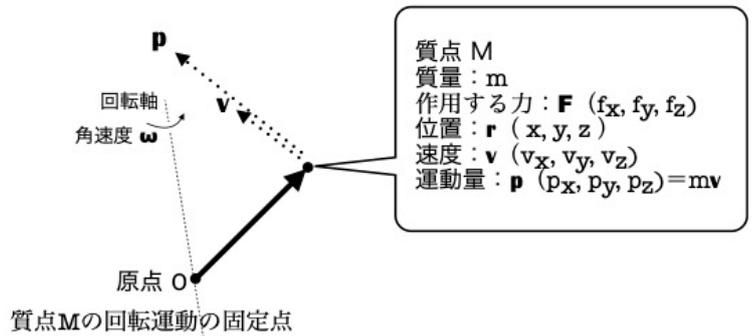


Figure 3: 質点 M の回転運動

式 (12) とベクトル三重積の公式より、

$$\mathbf{p}_\omega = m\{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})\vec{\omega} - (\mathbf{r} \cdot \vec{\omega})\mathbf{r}\} = m\{r^2\vec{\omega} - (x\omega_x + y\omega_y + z\omega_z)\mathbf{r}\} \quad (13)$$

$$= m \begin{pmatrix} r^2\omega_x - x^2\omega_x - xy\omega_y - zx\omega_z \\ r^2\omega_y - xy\omega_x - y^2\omega_y - zy\omega_z \\ r^2\omega_z - xz\omega_x - yz\omega_y - z^2\omega_z \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} (r^2 - x^2)\omega_x - xy\omega_y - zx\omega_z \\ -xy\omega_x + (r^2 - y^2)\omega_y - zy\omega_z \\ -xz\omega_x - yz\omega_y + (r^2 - z^2)\omega_z \end{pmatrix}. \quad (14)$$

$$= m \begin{pmatrix} \frac{(r^2 - x^2)}{-xy} & \frac{-xy}{+(r^2 - y^2)} & \frac{-zx}{-zy} \\ -xy & +(r^2 - y^2) & -zy \\ -xz & -yz & +(r^2 - z^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \quad (15)$$

式 (15) の 3 行 3 列の行列（仕切り線は見やすいように挿入）は、慣性モーメント  $I$  と表記され、

$$\mathbf{p}_\omega = I\vec{\omega}, \quad \text{ただし、} \quad I = m \begin{pmatrix} (r^2 - x^2) & -xy & -zx \\ -xy & +(r^2 - y^2) & -zy \\ -xz & -yz & +(r^2 - z^2) \end{pmatrix} \quad (16)$$

と書かれます<sup>1,2</sup>。

本設問の解答は、式 (14) の下線部です。

## 1.2 電流と磁場ベクトル

### 1.2.1 ベクトルの積 1.2.1 は、全面差し替え予定

一般に、ベクトルという量は「大きさと方向を持つ量で、平行移動の自由度がある。」とされていて位置の情報が欠如します。しかし物理量をあらわすベクトルではどうしても物理量なのでベクトルの起点や終点の情報が重要になります。ここで位置の情報がある位置ベクトルを導入して物理的にはベクトル量が完全化可以说えます。平行移動が可能な従来型のベクトルは  $\vec{a}$  や  $\mathbf{a}$  と表記されます。一方の位置ベクトルは始点 A と終点 B を使い  $\overrightarrow{AB}$  と書くことが多いです。本テキストでは位置ベクトルを  $\overrightarrow{AB}$  や始点（例えば A）を下付で表して  $\vec{a}_A$ 、 $\mathbf{a}_A$ 、 $(x, y, z)_A$  のように表すことにします。

ベクトル量の積は内積（記号  $\cdot$ ）と外積（記号  $\times$ ）の二種類が定義されます。この演算は平行移動可能なベクトルの範囲で定義され私たちはそれを学習してきました。これによりある 2 本のベクトルの内積が 0 になれば、この 2 つのベクトルは平行移動すれば直交するという情報が得られるなどします。しかし本書では三次元空間において位置ベクトルのこれらの演算を以下で考えてみたいと思います。なお、物理量ベクトルですので三次元ベクトルを対象とした議論です。

内積（三次元空間） について従来の内積と位置ベクトルの内積の本書での定義を記します。Fig. 4 に各内積の幾何学的関係を示しましたので、以下はこの図に沿って話を進めます。

<sup>1</sup>数学的には任意の  $n$  次元空間を議論できるので、慣性モーメント  $I$  はシグマ記号を用いた  $n$  行  $n$  列の行列表示になることが多いのですが、物理では 3 次元しか取り扱わないので煩雑な数学的表記は全く不要です。そのため、本テキストでは具体的に  $x, y, z$  で示しました（通常は  $1, 2, 3, \dots, n$ ）。

<sup>2</sup>本テキストでは一つの質点（物体）を考えましたが、 $k$  個の質点がお互いの相対位置を変えないように構成される剛体を考える場合は、各質点の慣性モーメント  $I_i$  は質量  $m_i$  と位置  $r_i, x_i, y_i, z_i$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ) で計算し、この剛体の角運動量  $\mathbf{p}_\omega$  は  $\mathbf{p}_\omega = \sum_{k=1}^i m_k I_k$  となります。

内積の取り決め (定義)

1. (記述方法) 内積は、(ベクトル量1)・(ベクトル量2) で表式する。以下では、(ベクトル量1) を第1ベクトル、(ベクトル量2) を第2ベクトルと呼ぶ。従来通りのベクトル内積か位置ベクトル内積かは、第1、第2ベクトルで表し、どちらの場合も演算記号は「 $\cdot$ 」を使用する。
2. (従来) 従来のベクトルの内積演算は、本来は成分計算で定義される。これにより、第1ベクトルと第2ベクトルの始点をそろえた時の第1ベクトルの第2ベクトルへの射影(長さ)が算出される。ただし、射影による第1ベクトルの向きが、第2ベクトルの方向にそろえば正の値、反対なら負の値となる。(Fig. 4ア)
3. (新規) 位置ベクトルの内積は、第1ベクトルの始点か終点に第2ベクトルの始点がある場合のみ定義し、内積値は、第1ベクトルの第2ベクトルへの射影とし、射影による第1ベクトルの向きが、第2ベクトルの方向にそろえば正の値、反対なら負の値となる。(Fig. 4ウ、エ)

以上の内積定義から、内積の特徴を以下にメモしましょう。

- (1) (従来) 従来のベクトル内積では第1ベクトルの第2ベクトル方向の成分と考えられる(ア)。また、両者が直交する場合のみ内積は0になる。
- (2) (新規) 位置ベクトルの内積値も第1ベクトルと第2ベクトルが直交する場合のみ0となる。

もう少し細かく分ける。

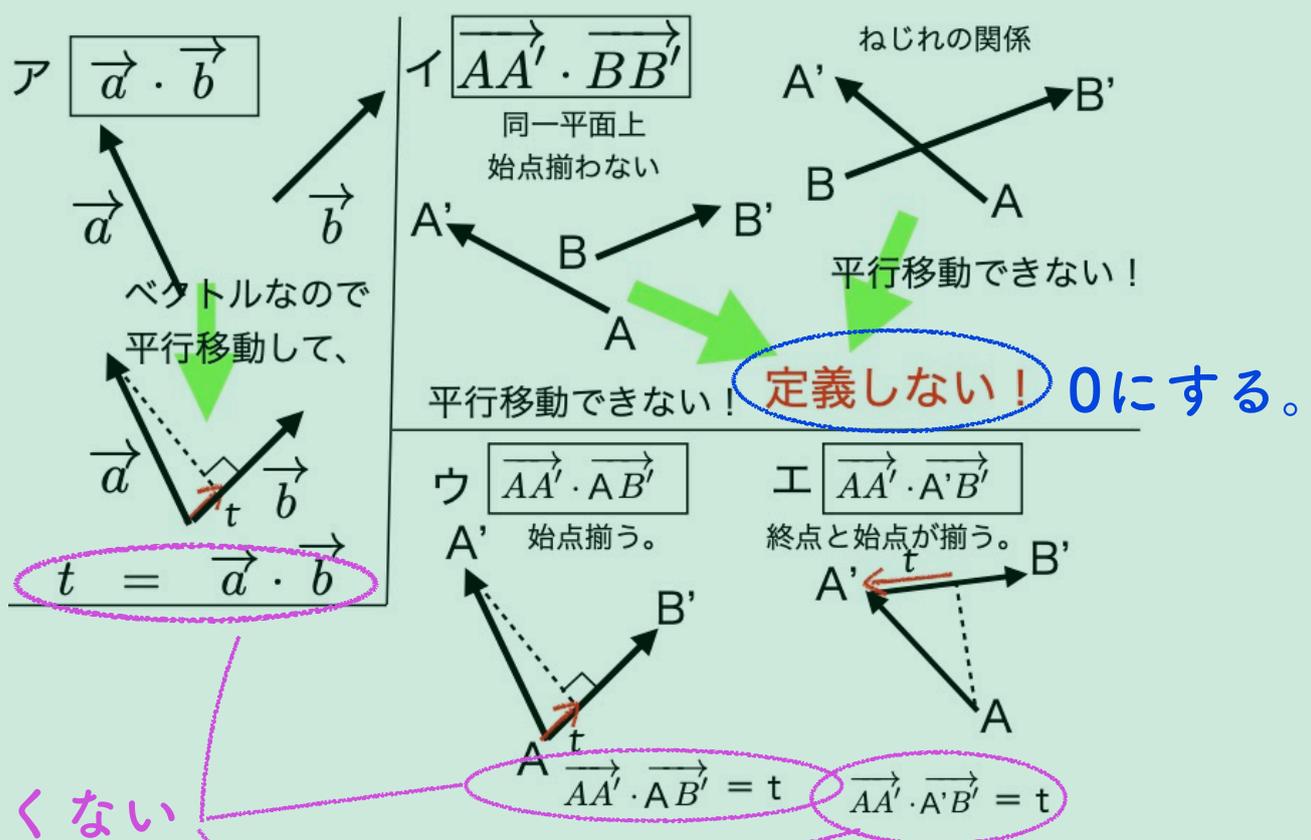


Figure 4: ベクトルと位置ベクトルの内積演算

**外積 (三次元空間)** について、従来の外積と本書での位置ベクトルの外積の定義を記します。Fig. 5に各外積の幾何学的関係を示しましたので、以下はこの図に沿って話を進めます。

# 再度、検討。丁寧な場合分けを考える予定。

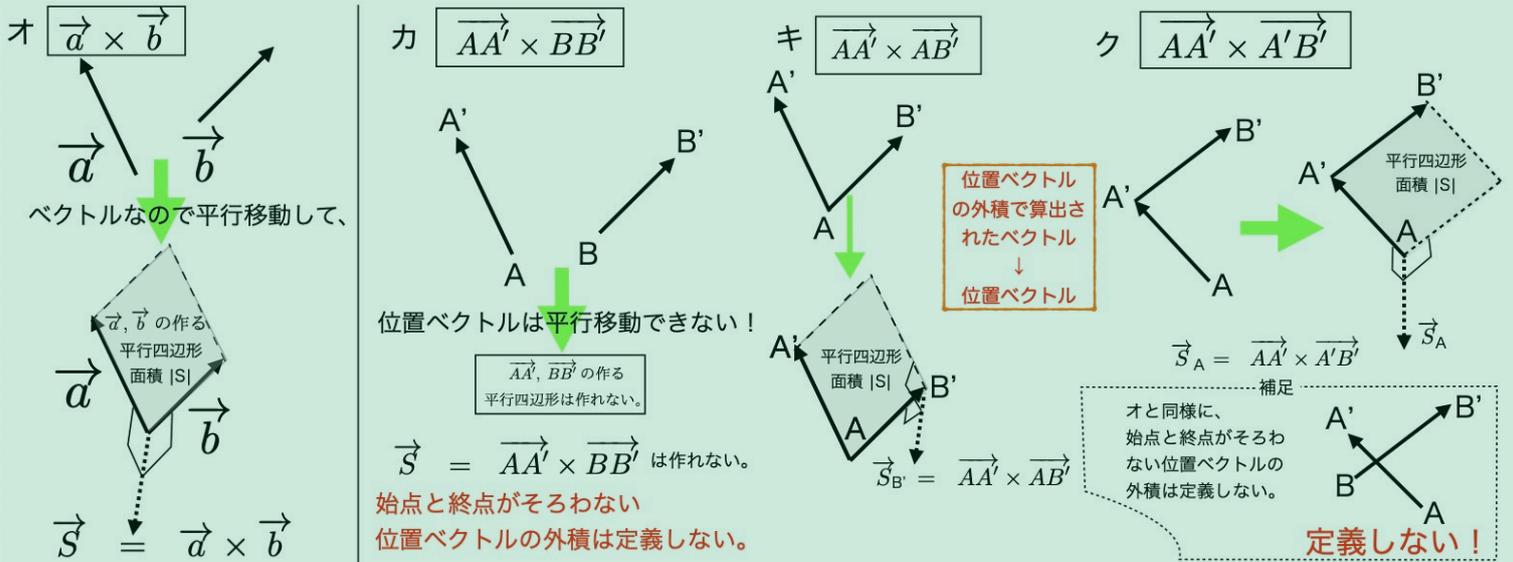


Figure 5: ベクトルと位置ベクトルの外積演算

## 外積の取り決め (定義)

1. 外積は (ベクトル量 1)  $\times$  (ベクトル量 2) で表式する。以下では、(ベクトル量 1) を第 1 ベクトル、(ベクトル量 2) を第 2 ベクトルと呼ぶ。従来通りの外積が位置ベクトルの外積かは、第 1、第 2 ベクトルで表し、どちらの場合も演算記号は「 $\times$ 」を使用する。
2. (従来) 従来通りの外積は、演算される 2 つのベクトルの始点が合うように平行移動させて作られる平行四辺形の面積値と同じ長さを持ち二つのベクトルに垂直で右ネジの進む方向を持つベクトルが算出される (Fig. 5 オ)。
3. (従来) 平行移動可能な普通のベクトルの外積によって作り出されるベクトルもまた平行移動可能な普通のベクトルとなる (Fig. 5 オ)。
4. (新規) 2 つの位置ベクトルの外積は、(A) 第 1 ベクトルと第 2 ベクトルの始点が同一 (Fig. 5 キ) か、もしくは (B) 第 1 ベクトルの終点と第 2 ベクトル始点 (Fig. 5 ク) がそろわなければ、位置ベクトルの外積は定義しない。
5. (新規) 位置ベクトルの外積で算出されたベクトルは位置ベクトルで、上記 (A) の場合は算出されたベクトルの起点は第 2 ベクトルの終点とし (Fig. 5 キ)、上記 (B) の場合は算出されたベクトルの起点は第 1 ベクトルの始点とする (Fig. 5 ク)。また、算出ベクトルの向きと大きさは上記 2. と同じとする。

以上の外積定義から、外積の特徴を以下にメモしましょう。

- (1) 平行移動できるベクトルによる従来タイプの外積であれば、始点が揃うようにベクトルを移動させて、算出されたベクトルを Fig. 5 オのように考え、算出されたベクトル  $\vec{s}$  は、平行移動できる従来通りのベクトルである。
- (2) 位置ベクトルの外積によって算出されるベクトルは位置ベクトルである。

### 1.2.2 観測位置と原因位置の観点から見たビオ・サバルの法則と力のモーメント

定常電流による磁場 No.2- ビオ・サバルの法則 (<https://seidenba.blog.ss-blog.jp/2017-12-19>) の式 (33)、式 (34) でビオ・サバルの法則式が与えられます。

ここでは、Fig. 6 に与えられたように、原点  $\mathbf{0}$  を起点とした微小電流  $\Delta\mathbf{I}_0^{\Delta\ell}$  (長さは  $\Delta\ell$ ) が位置  $\mathbf{r}_0$  (長さは  $r_0$ ) に作る磁場ベクトル  $\Delta\mathbf{B}_{\mathbf{r}_0}(\mathbf{r}_0, \Delta\mathbf{I}_0^{\Delta\ell}) \{= \Delta\mathbf{B}_{\mathbf{r}_0}\}$  という設定で、ビオ・サバルの法則を式で表すと、

$$\Delta\mathbf{B}_{\mathbf{r}_0} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\Delta\ell}{r_0^3} \Delta\mathbf{I}_0^{\Delta\ell} \times \mathbf{r}_0, \quad (17)$$

となります。

式 (17) の外積は位置ベクトルの外積で Fig. 5 のキに相当します。つまり、微小電流  $\Delta\mathbf{I}_0^{\Delta\ell}$  が自身から  $\mathbf{r}_0$  だけ離れた位置  $\mathbf{r}_0$  に影響を及ぼした結果として出来た磁場ベクトル  $\Delta\mathbf{B}_{\mathbf{r}_0}$  が

$$\Delta\mathbf{B}_{\mathbf{r}_0} = (\text{スカラー係数}) \cdot \Delta\mathbf{I}_0^{\Delta\ell} \times \mathbf{r}_0, \quad \rightarrow \quad \text{Fig.5 キの演算} \quad (18)$$

となるのです。

力のモーメント  $\mathbf{N}$  は、式 (3) や式 (4) で与えられます。ここで、回転による固定点を原点  $\mathbf{0}$  として、原点から  $\mathbf{r}_0$  の位置ベクトルで表された点に作用している力  $\mathbf{F}_{\mathbf{r}_0}$  とした場合の力のモーメント  $\mathbf{N}_0$  は、

$$\mathbf{N}_0 = \mathbf{r}_0 \times \mathbf{F}_{\mathbf{r}_0}, \quad \rightarrow \quad \text{Fig.5 クの演算} \quad (19)$$

となります。

式 (17) と式 (19) より、

- ・ 電流とこれにより観測対象点で生じる磁場との関係は位置ベクトルの外積演算 (Fig.5 キ) で与えられ、

$$\boxed{[\text{原因事象}:\Delta\mathbf{I}] \times [\text{原因事象点から観測対象への位置ベクトル}:\mathbf{r}_0] \rightarrow [\text{観測対象点における原因事象の影響}:\Delta\mathbf{B}]}$$

- ・ 回転系の回転固定点と観測対象点で発生する力のモーメントとの関係は位置ベクトルの外積演算 (Fig.5 ク) で与えられ、

$$\boxed{[\text{原因事象}:\mathbf{N}_0] \rightarrow [\text{原因事象点から観測対象への位置ベクトル}:\mathbf{r}_0] \times [\text{観測対象点での観測ベクトル量}:\mathbf{F}_{\mathbf{r}_0}]}$$

と解釈できます。さらに端的に書き表せば、位置ベクトルの外積演算は、

- ・ 原因ベクトル (位置ベクトル)  $\times$  観測対象点位置ベクトル = 結果ベクトル (位置ベクトル)
- ・ 原因ベクトル (位置ベクトル) = 観測対象点位置ベクトル  $\times$  結果位置ベクトル (位置ベクトル)

となります。

(後記) 位置の情報が外せない物理事象の根本を理解するために位置ベクトルについての内積と外積を定義しました。これらは、本書における暫定的な定義であって、もう少し考え直し整理することも将来的には生じるかもしれません。

コンピューターなどで数値計算をする場合などは、従来型の外積を定義して行う以外には方法はないのでしょうか。そういった意味で、平行移動可能なベクトルのみで内積や外積を定義したのは、それなりの妥当性がありますが、やはり位置ベクトルでの世界観を見失う重大な欠陥が隠されていたとも思います。この煽りを直接受けたのが電磁気学で、曖昧さや誤解が生じていると考えています。このため、本書では位置ベクトルの積の定義を試みました。

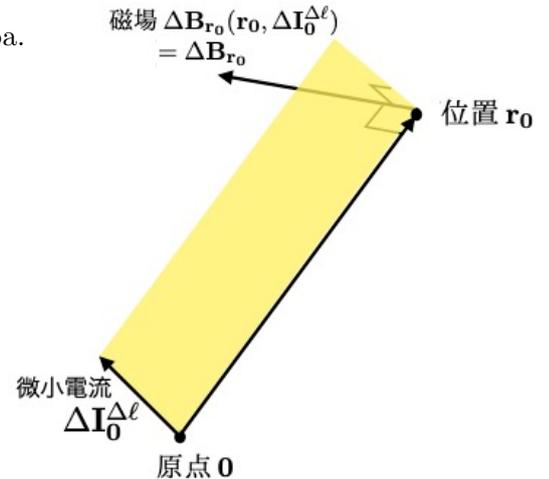


Figure 6: ビオ・サバルの法則式 (17) の配置図