定常電流による磁場 *No. 3* - 静磁場のアンペールの法則と湧出し源 -

The Author

October 5, 2021

Contents

2.2.3　立体角と立体角演算子

立体角については、“静電場”（https://physicsreport123.up.seesaa.net/image/E99D99E99BBBE5A0B4.pdf）の 15 ページで述べました（§ 5.1 参照）。本書では、立体角の式の意味についてさらに深く考察を行います。

ある閉曲平面 $\mathrm{d}S_\Gamma$ が、任意の基準点 O に対して、どの程度の大きさを占めるのかを評価する数値が立体角の一般的な認識だと思います。このような立体角の捉え方は、「立体角は天球に映る夜空の星の解析で生まれた解析値ではなかろうか？」や、「古代都市の測量技術で生まれた解析値なのかな？」などの想像が膨らみます。本章では、立体角が物理学で導入された真の目的を探ってみたいと思います。

また、本書ではあらたに 絶対ベクトル（位置の縛りのあるベクトル）と相対ベクトル（従来通りの並行移動可能なベクトル）の概念を取り入れましたので、添字を念入りに付けました。そして、科学テキストでのアルファベットの字体の持つ意味と、頻出する「S」の書き方で当方が行っている工夫 を§ 5.2 に記しました。

☆★

今、面積が S_Γ の閉曲面 S_Γ と基準点 O があり、さらに、基準点 O を中心とした半径 1 の球 1 を考えます（Fig. 9 参照)。閉曲面 S_Γ 上の点と点 O を結ぶ線分の球 1 での交点の集合が作る図形を閉曲面 S'_Γ とします。閉曲面 S'_Γ は、球 1 上にあり、その面積を S'_Γ とします。閉曲面 S_Γ が実際の空間（実空間）の閉曲面ですが、S'_Γ は S_Γ の立体角空間での閉曲面と呼ぶことにします。

この、立体角空間での閉曲面 S'_Γ の面積 S'_Γ が、実空間閉曲面 S_Γ の立体角 $\Omega_{\mathsf{S}_\Gamma}$ となります。

では、立体角を求める式を考えましょう。閉曲面 S_Γ を微小閉曲平面 $\mathrm{d}\mathsf{S}_\Gamma$ に分け、これに対応した立体角空間の微小閉曲平面を $\mathrm{d}\mathsf{S}'_\Gamma$ とします。S_Γ の立体角を $\Omega_{\mathsf{S}_\Gamma}$、$\mathrm{d}\mathsf{S}_\Gamma$ の立体角を $\mathrm{d}\Omega_{S_\Gamma}$ とします。

$$\Omega_{\mathsf{S}_\Gamma}(=S'_\Gamma)=\int_{\mathsf{S}_\Gamma}\mathrm{d}\Omega_{\mathsf{S}_\Gamma}, \tag{46}$$

基準点 O を原点とした時の微小閉曲平面 $\mathrm{d}\mathsf{S}_\Gamma$ の位置を点 $\mathsf{R}_{\mathsf{S}_\Gamma}$ とします。$\mathrm{d}S'_\Gamma$（$\mathrm{d}\mathsf{S}'_\Gamma$ の面積）は $\mathrm{d}S_\Gamma$（$\mathrm{d}\mathsf{S}_\Gamma$ の面積）を $1/|\mathsf{OR}^2_{\mathsf{S}_\Gamma}|$ 倍にし、$\overrightarrow{\mathsf{OR}_{\mathsf{S}_\Gamma}}$ 方向（動径方向）へ射影することにより得ることができます。$\mathrm{d}\mathsf{S}_\Gamma$ の法線単位ベクトル（基準点にむかう方向で始点が $\mathsf{R}_{\mathsf{S}_\Gamma}$）を $\mathbf{n}_{\mathrm{d}\mathsf{S}_\Gamma}$ とすると、

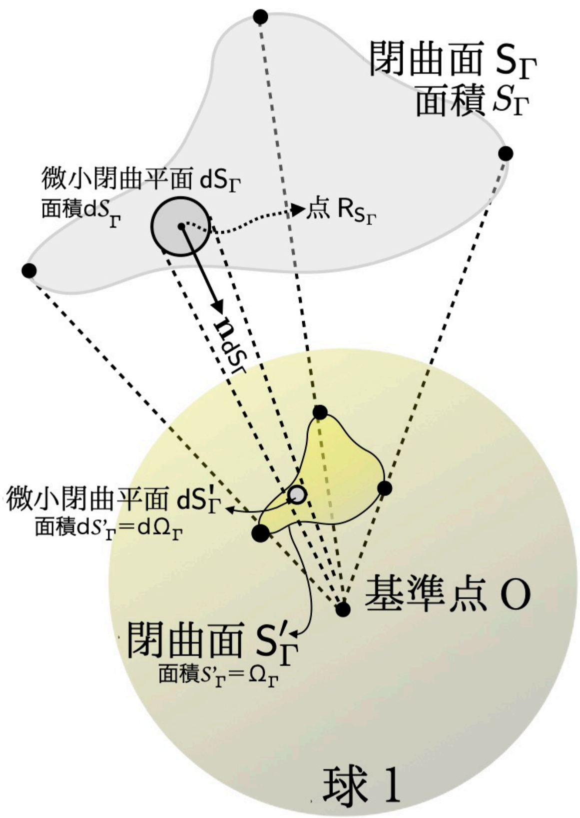


Figure 9: 立体角 Ω の定義

$$\mathrm{d}S'_\Gamma(=\mathrm{d}\Omega_{\mathsf{S}_\Gamma})=\frac{\overrightarrow{\mathsf{R}_{\mathsf{S}_\Gamma}\mathsf{O}}}{|\mathsf{R}_{\mathsf{S}_\Gamma}\mathsf{O}|}\cdot\mathbf{n}_{\mathrm{d}\mathsf{S}_\Gamma}\frac{\mathrm{d}S_\Gamma}{|\mathsf{R}_{\mathsf{S}_\Gamma}\mathsf{O}|^2}=\frac{\overrightarrow{\mathsf{R}_{\mathsf{S}_\Gamma}\mathsf{O}}\cdot\mathbf{n}_{\mathrm{d}\mathsf{S}_\Gamma}\mathrm{d}S_\Gamma}{|\mathsf{R}_{\mathsf{S}_\Gamma}\mathsf{O}|^3}, \tag{47}$$

となりますので、

$$\Omega_{\mathsf{S}_\Gamma}=\iint_{\mathrm{d}\mathsf{S}_\Gamma}\frac{\overrightarrow{\mathsf{R}_{\mathsf{S}_\Gamma}\mathsf{O}}\cdot\mathbf{n}_{\mathrm{d}\mathsf{S}_\Gamma}\mathrm{d}S_\Gamma}{|\mathsf{R}_{\mathsf{S}_\Gamma}\mathsf{O}|^3}, \tag{48}$$

という立体角の有名な定義式が得られます。式 (47) と式 (48) のベクトルの積は、絶対ベクトル（ベクトルの始点を規定する位置縛りのあるベクトル）として算出します。

S_Γ が基準点 O の全方位を囲む閉曲面であれば、球 1 の表面をすべて埋め尽くすので、S_Γ の立体角は、球 1 の全表面積となるので、4π となります。

☆★

物理では 閉曲面で囲まれる閉空間 Γ への流れの出入量の計算で立体角が利用されます。

つまり、流れを作るもの（媒質）が動いて微小面積 ΔS_Γ を通して閉空間 Γ の中に入ったり 出たりする量を計算するときに使われるのです。私たちがよく知っている媒質とこれが動く時の名称の一例として、空気と風があります（§ 4.2 で再度議論；未発表)。

流れが存在する空間として、ベクトル場が考えられます。ベクトル場とは、それぞれの位置に対応するベクトルが存在する場のことです。ただ単に感応物に作用する物理量（ex. 力等）を位置プロットして作ったベクトル場 と 感応物の変化を表すベクトル場（ex. 変位ベクトル，流れベクトル）は、「ベクトル場」という名で統一されているために、私たちは 意識的に同一のものと捉えようとしますが、無意識的に異なると認識しているため、往々にして混乱が生じているようです。ここで ベクトルの認識を整理すると、前者は感応物がなくても存在できる静的ベクトル場になり、後者は感応物がなければ存在できない動的ベクトル場という分類が妥当だと考えられます。閉空間 Γ へのある流れの出入量の計算の対象になるのは、当然ながら、動的ベクトル場が存在する閉空間 Γ です。他方、静的ベクトル場の場合、計算ファイル 2 で記しましたが、立体角を使った閉空間 Γ への出入流量を積分によって算出できますが、求められる値の意味が曖昧です。

なお、本書では、どちらのベクトル場であれ、閉曲面に対するベクトルの垂直成分の閉曲面積分値を流出入量や流束（フラックス）と呼びます。

（立体角を用いた流出入量の計算 ファイル１；動的ベクトル場編）

Fig. 10 に示すような閉曲面 S_Γ に囲まれた閉空間 Γ（体積 V_0）があります。この場合、閉曲面 S_Γ は閉空間 Γ の（閉曲）境界面と言います。閉空間 Γ 中に媒質である水が満たされていて基準点 O に対し等方的で一定な力によって押し出され空っぽになるとします。この時、閉曲面 S_Γ の微小閉曲平面 dS_Γ を通って出ていく水の量 V_{dS_Γ}[L] は、基準点 O に対する微小閉曲平面 dS_Γ の位置と立体角を それぞれ $\mathsf{R}_{\mathsf{S}_\Gamma}$，$\mathsf{d}\Omega_{\mathsf{S}_\Gamma}$ とし、微小閉曲平面 dS_Γ での水が流れ出る密度 $\vec{\rho}(\mathsf{R}_{\mathsf{S}_\Gamma})$[L/平方 m] とすると、

$$V_{\mathsf{dS}_\Gamma} = \vec{\rho}(\mathsf{R}_{\mathsf{S}_\Gamma}) \cdot \mathbf{n}_{\mathsf{dS}_\Gamma} \mathsf{d}S_\Gamma = |\mathsf{R}_{\mathsf{S}_\Gamma}\mathsf{O}|^2\ \vec{\rho}(\mathsf{R}_{\mathsf{S}_\Gamma}) \cdot \mathbf{n}_{\mathsf{dS}_\Gamma} \frac{\mathsf{d}S_\Gamma}{|\mathsf{R}_{\mathsf{S}_\Gamma}\mathsf{O}|^2}, \tag{49}$$

ただし、式 (49) の第 2 式から第 3 式では、分子と分母に $|\mathsf{R}_{\mathsf{S}_\Gamma}\mathsf{O}|^2$ をかませた恒等変形をしました。

式 (49) と式 (47) の第 2 式は赤と青で色分けした因子がお互いに対応しています。実空間から立体角空間への空間の変更（青い因子）で生じる現象の変化を補正するため観測量変換（赤い因子） を行なっていることを、式 (49) の第 2 式は表しているのです。式 (49) と式 (47) は同一立体角における異なる量を計算する式で、式 (49) は、微小閉曲平面 dS_Γ から流れ出る水の量を計算する式で、式 (47) は微小閉曲平面 dS_Γ の基準点 O に対する立体角（微小閉曲平面 dS_Γ の球 1 へ動径方向に射影してできる領域面積）を計算する式です。

ここで、実空間から立体角空間への空間の変更因子として**立体角演算子（ベクトル）**$\overrightarrow{d\Omega}_{\mathsf{S}_\Gamma}$

$$\overrightarrow{d\Omega}_{\mathsf{S}_\Gamma} = \frac{\mathbf{n}_{\mathsf{dS}_\Gamma} \mathsf{d}S_\Gamma}{|\mathsf{R}_{\mathsf{S}_\Gamma}\mathsf{O}|^2}, \quad \leftarrow \quad \text{立体角演算子（ベクトル）; 始点は点 } \mathsf{R}_{\mathsf{S}_\Gamma} \tag{50}$$

という新たな演算子の定義を行います。立体角演算子の特性を下記にまとめます。

立体角演算子について

1. 立体角演算子（ベクトル）$\overrightarrow{d\Omega}_{\mathsf{S}_\Gamma}$ に、立体角空間における基準点動径方向の単位ベクトルを作用させれば式 (47) のように立体角が算出される。

2. 立体角演算子が表す実空間の微小閉曲面 S_Γ でのベクトル場 $\mathbf{B}$ の値にスケール因子 $|\mathsf{R}_{\mathsf{S}_\Gamma}\mathsf{O}|^2$ を作用させたものが、実空間と等価な立体角空間におけるベクトル場 $\mathbf{B}'$ となります。これに立体角演算子を作用させた $\mathbf{B}'\overrightarrow{d\Omega}_{\mathsf{S}_\Gamma}$ が、微小閉曲面 S_Γ を通じて移動するベクトル場 $\mathbf{B}$ の流束量が算出される。

（立体角を用いた流出入量の計算 ファイル２；一般編）

単位面積あたりに作用する物理量ベクトル場 $\mathbf{F}$ の中に、境界閉曲面 S_Γ で囲まれた閉空間 Γ と、その内部に基準点 O があります（Fig. 10 参照）。境界閉曲面 S_Γ 上の微小閉曲面 dS_Γ を考えます。微小閉曲面 dS_Γ の位置と立体角演算子を、それぞれ $\mathsf{R}_{\mathsf{S}_\Gamma}$，$\overrightarrow{d\Omega}_{\mathsf{S}_\Gamma}$ とします。

微小閉曲面 dS_Γ におけるベクトル場 $\mathbf{F}$ 流出入量（フラックス）F_{dS_Γ} は、式 (49) より

$$F_{\mathsf{dS}_\Gamma} = \mathbf{F}(\mathsf{R}_{\mathsf{S}_\Gamma})\cdot\mathbf{n}_{\mathsf{dS}_\Gamma}\mathsf{d}S_\Gamma = |\mathsf{R}_{\mathsf{S}_\Gamma}\mathsf{O}|^2\,\mathbf{F}(\mathsf{R}_{\mathsf{S}_\Gamma})\cdot\mathbf{n}_{\mathsf{dS}_\Gamma}\frac{\mathsf{d}S_\Gamma}{|\mathsf{R}_{\mathsf{S}_\Gamma}\mathsf{O}|^2}, \tag{51}$$

閉空間 Γ へのベクトル場 $\mathbf{F}$ の流出入量（流束）F_Γ は境界閉曲面 S_Γ で式 (51) を積分すれば良いので、

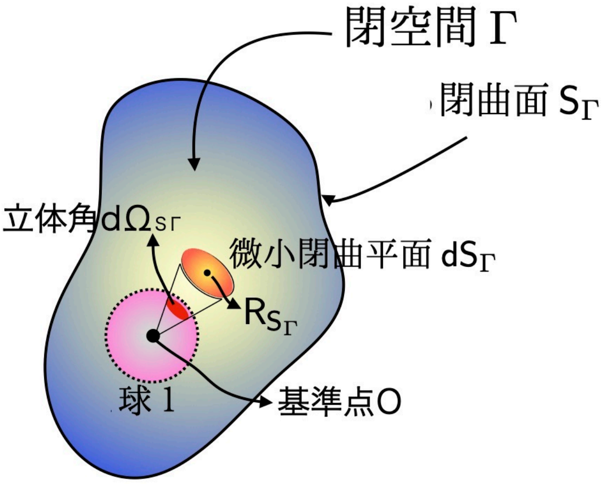


Figure 10: 計算ファイル１、２のジオメトリー

$$F_\Gamma = \iint_{\mathsf{S}_\Gamma}\mathbf{F}(\mathsf{R}_{\mathsf{S}_\Gamma})\cdot\mathbf{n}_{\mathsf{dS}_\Gamma}\mathsf{d}S_\Gamma = \int_{球\,1}|\mathsf{R}_{\mathsf{S}_\Gamma}\mathsf{O}|^2\,\mathbf{F}(\mathsf{R}_{\mathsf{S}_\Gamma})\cdot\overrightarrow{d\Omega}_{\mathsf{S}_\Gamma}, \tag{52}$$

となります。

式 (52) を眺めると、$\mathbf{F}(\mathsf{R}_{\mathsf{S}_\Gamma}) \propto 1/|\mathsf{R}_{\mathsf{S}_\Gamma}\mathsf{O}|^2$ がとなるベクトル場の場合は、第３式の立体角演算子を用いた積分が威力を発揮します。このため、静止電荷が作る電場ベクトル $\mathbf{E}$ では非常によく用いられ、電荷から発生する電束量の計算からガウスの法則などが導けるのです。しかし、$\mathbf{F}(\mathsf{R}_{\mathsf{S}_\Gamma}) \propto 1/|\mathsf{R}_{\mathsf{S}_\Gamma}\mathsf{O}|^2$ のような関係がない場合は、立体角空間で議論するメリットはありません。

「閉空間 Γ の境界閉曲面 S_Γ におけるベクトル場 $\mathbf{F}$ の垂直成分の S_Γ 面積分は、閉空間 Γ への $\mathbf{F}$ 流出入量の合計」と言われて、流量以外のベクトル量を想像するのは厳しいでしょう。実は これが 電場ベクトル $\mathbf{E}$ のガウスの法則なので、みんな面食らってしまうのが現状です（§ 4.2 で再度議論；未発表）。

☆★☆☆★

立体角のまとめ

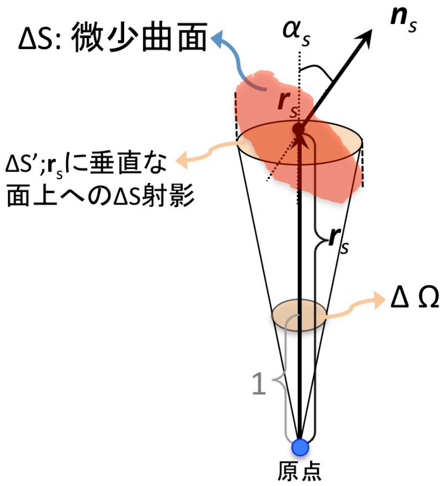
- 立体角はある点からの距離の２乗に反比例する強さを有するベクトル場の流束の流出入量の解析に有効です。
- 立体角を用いた解析は、空間を実空間から立体角空間へと変更して現象を捉え直すことになります。空間変換因子は立体角演算子、ベクトルは基準点から距離の二乗をかけた立体角空間ベクトルへと変換する必要があります。
- 式 (47) や式 (48) が立体角の定義式とされていますが、実際は、ある基準点を中心とした半径１の球への基準点に対する微小面積の動径方向の射影の面積を求める式です。このため、立体角利用としてより本質的なものは、式 (50) の立体角演算子であると言え、これを導入しなければ立体角利用の醍醐味は理解しづらいと考えています。

5 巻末資料

5.1 資料１、立体角

2015 年の“ 静電場 ”（https://physicsreport123.up.seesaa.net/image/E99D99E99BBBE5A0B4.pdf）の 15 ページで、当方が記した立体角の説明です。当時の記述もしっくり来なかったので、本書では、立体角の定義を立体角演算子に集約させて捉え直しました。扱いが画期的に異なりますので、以前の記述を資料として載せます。

立体角



立体角[a]とは、閉曲面上の積分で活躍する変数です。

もし、閉曲面が解析的で、方程式が $f(x,y,z)=a$ と具体的に与えられていていたら、曲面の法線を求め、面積素片を極座標表示 $r^2\sin\theta\Delta\theta\Delta\phi$ として積分変数を変換して計算する手段が定石です。計算が煩雑で近似値になる可能性もありますが、力技で何とか計算結果が出せます。

★★★

しかし、立体角への変数変換という別の手段もあります。被積分関数が式（34）[b]内の $\dfrac{\mathbf{r}_s-\mathbf{r}_k}{|\mathbf{r}_s-\mathbf{r}_k|^3}\cdot\mathbf{n}_s$ のような r のみの関数である場合、極座標面積素片表示ではお手上げであるフリーハンドで書かれた閉曲面でも、Ω の積分領域と電荷の位置 $\mathbf{r}_e$ による事が簡単に算出できます[c]。

一般的な場合について、δS から $\delta\Omega$ への変換を記しましょう。その閉曲面 S の法線ベクトルの閉曲面外向き $\mathbf{n}$ と定義します。ちなみに、ベクトル場 $\mathbf{A}$ とすると、内積 $\mathbf{A}\cdot\mathbf{n}$ の S の閉曲面積分量は、その S 全体からのベクトル場 $\mathbf{A}$ の流入（負値）・流出（正値）量となります。

閉曲面 S 上の任意の点の位置と法線ベクトルを $\mathbf{r}_s$ と $\mathbf{n}_s$ とし、そのなす角を α_s とします。すると、$\dfrac{\mathbf{r}_s}{r_s}\cdot\mathbf{n_s}=\cos\alpha_s,$ になります。他方、角 α_s は $\mathbf{r}_s$ によって位置付けされる微少面 $\triangle S$ と $\mathbf{r}_s$ に垂直な面と $\triangle S'$ のなす角度になります（左図 参照）。したがって、両者の面積の関係は、$\triangle S'=\triangle\mathrm{S}|\cos\alpha_s|$ となります。この原点に対する $\triangle\mathrm{S}$ の立体角 $\triangle\Omega$ は、その定義により、$\triangle\Omega=\dfrac{\triangle\mathrm{S}'}{r_s^2}$ となります。したがって、$\triangle\Omega=\dfrac{\triangle\mathrm{S}'}{r_s^2}=\dfrac{\triangle\mathrm{S}|\cos\alpha_s|}{r_s^2}$、ゆえに、

$$\triangle\mathrm{S}=\frac{r_s^2}{|\cos\alpha_s|}\triangle\Omega, \tag{66}$$

となります。

[a] wikipedia より

立体角（りったいかく、英語: solid angle）とは、二次元における角（平面角）の概念を三次元に拡張したものである。平面上における角とは、平面上の同一の点（角の頂点）から出る二つの半直線によって区切られた部分のことをいい、この 2 半直線の開き具合を角度という。角度は、角の頂点を中心とする半径 1 の円から、2 半直線が切り取った円弧の長さで表すことができる。これに対し、空間上における立体角とは、空間上の同一の点（角の頂点）から出る半直線が動いてつくる錐面によって区切られた部分のことをいい、この錐面の開き具合を角度という。角度は、角の頂点を中心とする半径 1 の球から錐面が切り取った面積の大きさで表すことができる。立体角の単位にはステラジアンが使われる。また、天文学で天球上における面積を表すのに用いられる平方度も立体角の単位の一つである。全立体角は 4 π [sr（ステラジアン）] である。

[b] 2015 年の“ 静電場 ”テキスト内の式番号

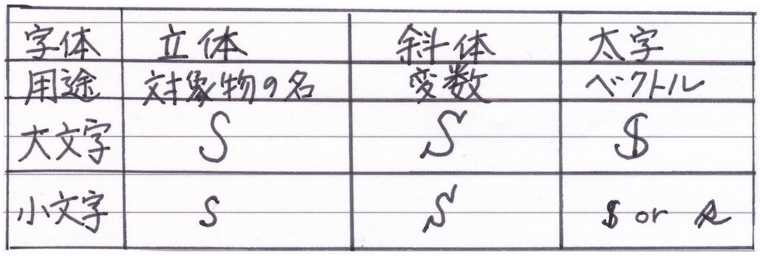
[c] 他にも、閉曲面の微少面積部ベクトル（閉曲面上のある面積素片（ΔS）の法線方向に，長さがその面積に等しい外向きを正方向にするベクトル）の総和は 0 になるという定理は立体角を使えば簡単に証明されます。

5.2　資料２、アルファベットの字体

科学的記述においては、アルファベットの字体に科学的な意味が下記のように含まれます。

立体 対象物の名称（ex. 微小閉曲面 S，点 R）; 普通の真っ直ぐな字体
斜体 変数（ex. 位置 $(x,\ y,\ z)$）
太字 ベクトル　（ex. 位置 $\mathbf{r}$）

手書きの際、立体はブロック体、斜体は筆記体、太字は縦線を足すなどで対応しますが、文字によってはなかなか煩雑になります。本書では“S”の大文字も小文字もたくさん出てきますので、当方が手書きで書き分けている字体を参考に記します。



字体	立体	斜体	太字
用途	対象物の名	変数	ベクトル
大文字	S	S	S
小文字	s	s	s or s