

定常電流による磁場 No. 2-ビオ・サバールの法則-

The Author

December 19, 2017

Contents

1	ビオ・サバールの法則	2
1.1	(復習と導入) 直線定常電流による磁場について	2
1.2	$\mathbf{I} - \mathbf{B}$ 間の対称性	3
1.3	法則式の導出	5
1.3.1	式 (1) からの導出	5
1.3.2	注意点とまとめ	9
1.4	法則式の検証	10
1.4.1	観測点に対称に折り曲げた定常電流の作る磁場	10
1.4.2	対称性が低くなった定常電流の作る磁場	12
2	考察	13
2.1	法則式から物理を読み解く時には	13
2.2	ビオ・サバールの法則の骨子	14
2.3	ビオ・サバールの法則が語る電場と磁場と今後の展開	15

1 ビオ・サバールの法則

1.1 (復習と導入) 直線定常電流による磁場について

“定常電流による磁場 No. 1 シリーズ”では、無限に長いと近似できる直線定常電流の作る磁場（磁束密度ベクトル）について考察しました。その結果が、“定常電流による磁場 No. 1 シリーズ” §3-2 式 (23) でした。歴史的にも、磁場の発見の出発点が直線定常電流だったので、このテキストでも、その考察から始めたわけですが。

例題

“定常電流による磁場 No. 1, 式 (23)”で導出した法則式（直線定常電流の作る磁場）を、図1の配置（観測点 $R_0 (= \mathbf{r}_0)$ 、観測点 R_0 から定常電流経路に下ろした垂線の交点 O' ）にあてはめると、

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}_0) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{1}{|\mathbf{O}'R_0|} \mathbf{I} \times \overrightarrow{\mathbf{O}'R_0}. \quad (1)$$

これは、アンペールの実験結果から導かれた式ですが、使われた実験結果を2つ挙げてください。

【解】

- (1) \mathbf{B} の方向は \mathbf{I} と $\overrightarrow{\mathbf{O}'R_0}$ に垂直になる。
- (2) \mathbf{B} の大きさは、距離 $|\mathbf{O}'R_0|$ に反比例し、定常電流 I に比例する。

定常電流 I ; z 軸正方向に定義する。

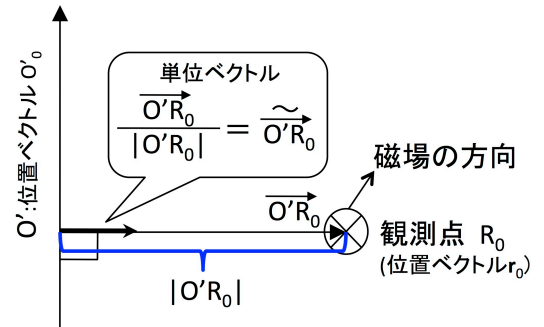


Figure 1: 直線定常電流 \mathbf{I} と観測点 $R_0 (= \mathbf{r}_0)$ の配置
: 電流の流れる方向を z 軸正方向に定義

例題 1 終わり

【大切な問題だから、電流が作る磁場をもっとじっくり考えよう！】

電流 (\mathbf{I}) と観測点 (\mathbf{R}_0) が作る平面を平面 α としましょう。以後、この平面 α は度々使いますので、定義をしっかりと覚えておいてください。

ここで、直線電流が作る磁場は磁束密度ベクトル $\mathbf{B}(\mathbf{r}_0)$ で数量化するので、

$$\begin{aligned} &\text{平面 } \alpha \text{ に垂直な成分ベクトルを } \mathbf{B}_\perp, \alpha \text{ 面内の成分ベクトルを } \mathbf{B}_\alpha \\ \Rightarrow &\mathbf{B}(\mathbf{r}_0) = (\mathbf{B}_\perp, \mathbf{B}_\alpha) \end{aligned}$$

とベクトル分割し、解 (1) を

$$\text{磁束密度ベクトル } \mathbf{B}(\mathbf{r}_0) \text{ の平面 } \alpha \text{ 面内の成分ベクトル } \mathbf{B}_\alpha = \mathbf{0},$$

と表現し直しましょう。では、いよいよ、

“どうして \mathbf{B}_α が 0 になるのか?”

について考えます。

直線定常電流を微小区間に分け、その各微小区間が観測点 R_0 に作る磁束密度ベクトルを

$$\Delta \mathbf{B}(\mathbf{r}_0) = (\Delta \mathbf{B}_\perp(\mathbf{r}_0), \Delta \mathbf{B}_\alpha(\mathbf{r}_0)) \quad (2)$$

と置きましょう。

先の問いに対する予想されうる **答え** の候補は以下の **あ、い** の2つです。

あ. その微小区間での $\Delta \mathbf{B}_\alpha$ の値は0でないものも存在しますが、直線電流全体からの寄与 $\mathbf{B}_\alpha = \int_{z=-\infty}^{\infty} \Delta \mathbf{B}_\alpha$ の計算を行うと計算値が0となり、結果として、例題式(1)が得られるからです。

い. そもそも、元からなく、つまり、 $\Delta \mathbf{B}_\alpha \equiv 0$ になるからです。

ここはとても重要な問題です。

1.2 I – B 間の対称性

ここで、問い“なぜ、 $\mathbf{B}_\alpha = \mathbf{0}$ なのか?”を考えるにあたり、**対称性を考慮して、電流が作る磁場**を考えてみます。

まず、O' を原点Oとします。さらに、定常電流 \mathbf{I} を z 軸とし、ある微小区間 Z の位置と長さを、それぞれ、 $(0, 0, z)$, Δz とします。

正の領域の任意の微小区間を $Z_n, (0, 0, z_n)$, Δz_n としましょう。原点Oに対して Z_n に対称な微小区間を $Z_{-n}, (0, 0, z_{-n})$, Δz_{-n} と書きます。さらに、微小区間 Z_n と Z_{-n} が、観測点 R_0 に作る磁束密度ベクトルを $\Delta \mathbf{B}_n, \Delta \mathbf{B}_{-n}$ とします。微小区間 Z_n と Z_{-n} での電流の向きは同じ z 方向です。図2は、原点O、定常電流 \mathbf{I} と z 軸と、微小区間 Z_n と Z_{-n} の平面 α 上の配置を表しました。

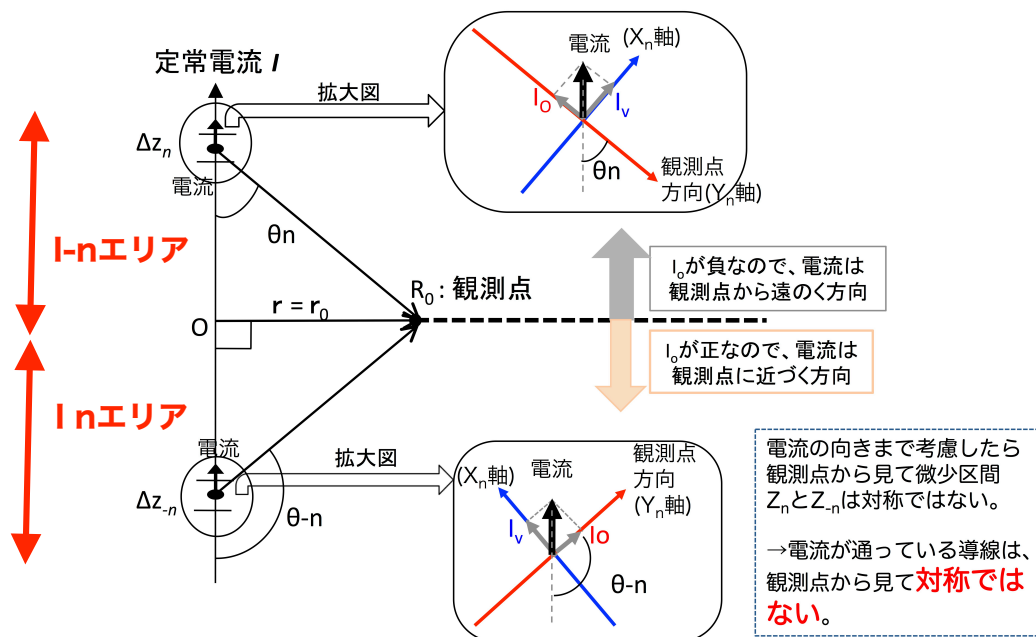


Figure 2: 原点Oと観測点 R_0 と微小区間 Z_n と Z_{-n} と z 軸 (定常電流) の平面 α 上での配置図

ここで、各微小区間の電流を平面 α 上で分解します。この時の分解軸は電流方向を z 軸とした座標系とは全く別です。分解軸は以下の 2 本です。

- Y_n 軸：微小区間 Z_n から観測点への方向、
- X_n 軸：紙面裏方向 (Z_n 軸) が z 軸、 y 軸が Y_n 軸の時に、右手系で定義される x 軸、

前者の成分を I_o 、後者の成分を I_v と記し、 $\mathbf{I} = (I_v, I_o)$ と表記しましょう (図 2 参照)。また、 Y_n 軸と $-\vec{z}$ (電流の流れの反対方向) のなす角を θ_n とすれば、微小区間 Z_n, Z_{-n} に対し、それぞれ、両角の変位領域は、 $\theta_{-n} = [\pi, \frac{\pi}{2}]$ 、 $\theta_n = [\frac{\pi}{2}, 0]$ となり、 $\theta_{-n} = \theta_n = \frac{\pi}{2}$ で接続します。

$\mathbf{I}_{-n}, \mathbf{I}_n$ の記述は、

$$\mathbf{I}_{-n} = (I_v, I_o) = (I \sin \theta_{-n}, -I \cos \theta_{-n}) \quad (\frac{\pi}{2} \leq \theta_{-n} \leq \frac{\pi}{2}), \quad (3)$$

$$\mathbf{I}_n = (I_v, I_o) = (I \sin \theta_n, -I \cos \theta_n) \quad (\frac{\pi}{2} \leq \theta_n \leq \frac{\pi}{2}), \quad (4)$$

となります。

式 (3) と (4) から、 θ の定義領域 $[\pi, 0]$ において、その中心 $\theta = \pi/2$ に対して、 I_v は偶関数、 I_o は奇関数になることがわかります。言い換えれば、 I_v は観測点 (もしくは、 θ) に対して対称、 I_o は観測点に対して反対称になると言えます。

物理的な事象に沿って言えば、観測点からの電流は、 I_v を観測すれば対称であり、 I_o を観測すれば反対称であり、 I の観測の仕方によっては、対称的にも反対称的にも、両者同時にも観測されると言えます。また、平面 α に垂直な電流成分を観測したら常に 0 になります。したがって、観測点から直線電流を見たら、1 つの対称性では表せず、複数の対称性があるという状況です。

このような時は、観測点から微小区間の電流の動きの対称性を群によって表し、考察する手法が取られます。観測点から微小区間の電流の動きの対称性を群 $\Omega_{\mathbf{I}}$ と表します。

対称を Ω_+ 、反対称を Ω_- 、そして、常に 0 の対称性を \emptyset と、それぞれ置けば、 $\Omega_{\mathbf{I}} = \{\emptyset, \Omega_+, \Omega_-, \Omega_+ \oplus \Omega_-\}$ (これは、観測によっては Ω_+ の性質を持ったり、 Ω_- や $\Omega_+ \oplus \Omega_-$ 的な性質も持つという物理的事実を表しています。) と書き表すのです。これによって、全体が一目瞭然になります。

他方、直線定常電流が作る磁束密度ベクトルを求める式 (1) の意味するところは、

s (微小電流) が直線的に集合した S (直線定常電流) により発生した物理量、すなわち t ($\Delta \mathbf{B}$) の集合 $T(\mathbf{B})$ は、 α 面内で観測すれば、その観測量 $T = \mathbf{B}_\alpha = 0$ になる。

です。ここで、

仮定 A

ある物理現象 s ($\Delta \mathbf{I}$) の作るもう一つの物理現象 t (磁束密度ベクトル $\Delta \mathbf{B}$) において、 t の幾何学的対称性は、 s が持つそれらの中のいずれかである。

が成立するとしましょう。これを対称性保存則と呼びましょう。

仮定 A の元での電流と磁場 \mathbf{B}_α の間に想定される結論は以下の 3 つです。

- ・ 結論 1 I_o は、任意の積分区間で $\int_{\theta}^{\theta+\delta} I_o d\theta \neq 0$ であるが、 $\int_{\theta=-\pi}^0 I_o d\theta = 0$ となるので、仮定 A が成立すれば、 I_o が寄与する磁束密度ベクトル $\mathbf{B}(I_o) = \int_{\theta=-\pi}^0 \Delta \mathbf{B}(I_o) \equiv 0$ になる。以後は、反対称性と呼びます。

- ・ 結論2 I_V は、任意の積分区間で $\int_{\theta}^{\theta+\delta} I_V d\theta \neq 0$ であり、 $\int_{\theta=\pi}^0 I_V d\theta \neq 0$ となるので、仮定 A が成立すれば、 I_V が寄与する磁束密度ベクトル $\mathbf{B}(I_V) = \int_{\theta=\pi}^0 \Delta\mathbf{B}(I_V) \neq 0$ になる。以後は、対称性と呼びます。
- ・ 結論3 有効な対称性は \emptyset のみである。

また、 \mathbf{B}_α への有効な対称性の組み合わせは、以下の4つの場合 (ア) ~ (エ) が考えられます。

仮定 A (対称性保存則) の元での可能性

- (ア) $\Delta\mathbf{B}_\alpha$ への寄与は、 I_o (Ω_-) も I_V (Ω_+) もなく、 $\Delta\mathbf{B}_\alpha \equiv 0$ となり、 $\mathbf{B}_\alpha \equiv 0$ になる。
- (イ) $\Delta\mathbf{B}_\alpha$ への寄与は I_o (Ω_-) のみで、 $\Delta\mathbf{B}_\alpha = \Delta\mathbf{B}_\alpha(I_o)$ となる場合、 $\Delta\mathbf{B}_\alpha(I_o) \equiv 0$ でなくても I_o の反対称性のため、 $\mathbf{B}_\alpha \equiv 0$ になる。
- (ウ) $\Delta\mathbf{B}_\alpha$ への寄与は I_V (Ω_+) のみで、 $\Delta\mathbf{B}_\alpha = \Delta\mathbf{B}_\alpha(I_V)$ となる場合、 $\Delta\mathbf{B}_\alpha(I_V) \equiv 0$ の時のみ、 $\mathbf{B}_\alpha \equiv 0$ になる。
- (エ) $\Delta\mathbf{B}_\alpha$ への寄与は、 I_o (Ω_-) と I_V (Ω_+) の両方で、 $\Delta\mathbf{B}_\alpha = \Delta\mathbf{B}_\alpha(I_V) + \Delta\mathbf{B}_\alpha(I_o)$ となる場合、 $\Delta\mathbf{B}_\alpha(I_V) \equiv 0$ の時のみ、 $\mathbf{B}_\alpha \equiv 0$ になる。

上記の影付き四角で囲った事が実現するためには、先の3つの想定結論と場合 (ア) から (エ) の整合を考えると、有効な場合は (ア) と (イ) のみになります。なぜなら、 $\Delta\mathbf{B}_\alpha(I_V) \equiv 0$ は、 I_V は、 \mathbf{B}_α に寄与しないと考えると差し支えないので、(ウ) は (ア) に、(エ) は (イ) に含まれるからです。これらの可能性について右表にまとめたので参考にして下さい。また、場合 (ア) は、対称性 \emptyset のみ有効で、結論3と等価です。

以上から、 \mathbf{B}_\perp 、 \mathbf{B}_α 、 $\Delta\mathbf{B}_\alpha$ 、 $\Delta\mathbf{B}_\perp$ について具体的に算出する際に、可能性 (ア) と (イ) のどちらが、式 (1) を物理的に適切に捉えているか考慮することが重要なポイントであることがわかりました。

	$\Delta\mathbf{B}_\alpha$ への寄与		条件	備考
	I_V	I_o		
(ア)	✗	✗		結論3
(イ)	✗	○	I_o の反対称性	
(ウ)	○	✗	$\Delta\mathbf{B}_\alpha(I_V) \equiv 0$	(ア)となる。
(エ)	○	○	I_o の反対称性 $\Delta\mathbf{B}_\alpha(I_V) \equiv 0$	(イ)となる。

1.3 法則式の導出

1.3.1 式 (1) からの導出

この章では、 \mathbf{B}_\perp 、 \mathbf{B}_α 、 $\Delta\mathbf{B}_\alpha$ 、 $\Delta\mathbf{B}_\perp$ を求めるために、式 (1) の方程式を計算します。

式 (1) は (2) を使って、

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}_0) = \int_{z=-\infty}^{\infty} \Delta\mathbf{B}(\mathbf{r}_0) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\mathbf{I} \times \widehat{O'R_0}}{|O'R_0|} \quad (5)$$

という微分方程式に変形されます。

ここで、この微分方程式を解くために、変数を次のように再確認・再設定をします (図3に定常電流、観測点、微少区間、そして座標軸を記し、各変数を書き込みました。こちらを参照してください。)

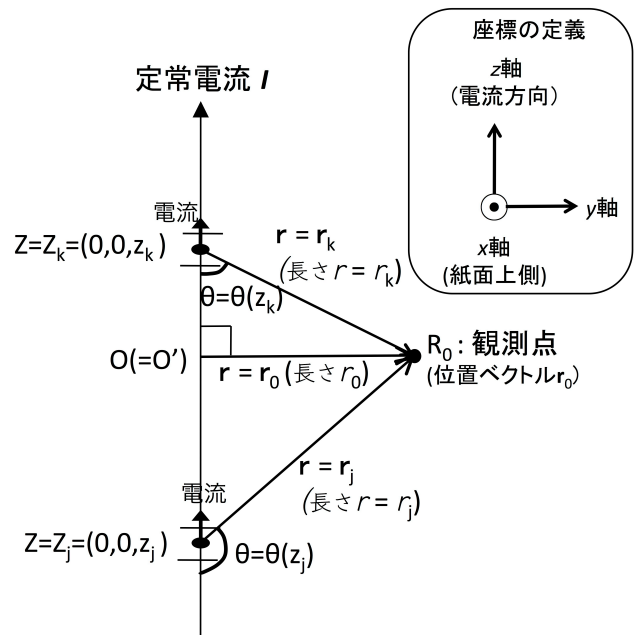


Figure 3: 定常電流、観測点、微少区間の配置と座標軸と変数 (注；紙面とは平面 α)

変数の再確認と再設定

- O' を原点 O ,
- 任意の微小電流区間の位置を点 Z とし、その座標を $(0, 0, z)$,
- $\overline{ZR_0} = r$, $\overrightarrow{ZR_0} = \mathbf{r}$,
- $\overline{OR_0} = r_0$, $\overrightarrow{OR_0} = \mathbf{r}_0$,
- $\overrightarrow{ZR_0}$ と $-\overrightarrow{z}$ のなす角を θ ,

式 (5) で、関数 $\Delta\mathbf{B}(\mathbf{r}_0)$ は \mathbf{r}_0 の関数と表記しましたが、これは完全ではありません。関数 $\Delta\mathbf{B}(\mathbf{r}_0)$ は変数 z 、 \mathbf{r}_0 と \mathbf{I} の 3 変数により決定されます。 \mathbf{r}_0 を定点扱いして、 z により積分された関数 $\mathbf{B}(\mathbf{r}_0)$ は、 \mathbf{r}_0 と \mathbf{I} の関数です。

今まで、 $\mathbf{B}(\mathbf{r}_0)$ や $\Delta\mathbf{B}(\mathbf{r}_0)$ は、平面 α 内 \mathbf{B}_α , $\Delta\mathbf{B}_\alpha$ と、それに垂直な方向 \mathbf{B}_\perp , $\Delta\mathbf{B}_\perp$ でベクトル分解して議論してきましたが、具体的に解析を進めるために、スカラー（成分）分解して、成分計算ができるようにします。そこで、あらたに (x, y, z) という直交する三本の直交座標で記述する磁束密度ベクトル $\Delta\mathbf{b}^{(\mathbf{I}, \mathbf{r}_0)}(z)$ を導入することにします。この直交座標は、定常電流を z 軸とし、 $\overrightarrow{O'R_0}$ の方向を y 方向にし、右手系の直交座標を組みます（図 3 に詳細を記しましたので参照）。

以後の議論では、微小電流が作る磁場は、

$$\Delta\mathbf{B}(\mathbf{r}_0) \Rightarrow \Delta\mathbf{b}^{(\mathbf{I}, \mathbf{r}_0)}(z) = \left(\Delta b_x^{(\mathbf{I}, \mathbf{r}_0)}(z) \quad \Delta b_y^{(\mathbf{I}, \mathbf{r}_0)}(z) \quad \Delta b_z^{(\mathbf{I}, \mathbf{r}_0)}(z) \right). \quad (6)$$

を使い、議論を進めます。

式 (6) を式 (5) に代入すると、

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}_0) &= \int_{z=-\infty}^{\infty} \left(\Delta b_x^{(\mathbf{I}, \mathbf{r}_0)}(z), \Delta b_y^{(\mathbf{I}, \mathbf{r}_0)}(z), \Delta b_z^{(\mathbf{I}, \mathbf{r}_0)}(z) \right) \\ &= \mathbf{x} \int_{z=-\infty}^{\infty} \Delta b_x^{(\mathbf{I}, \mathbf{r}_0)}(z) + \mathbf{y} \int_{z=-\infty}^{\infty} \Delta b_y^{(\mathbf{I}, \mathbf{r}_0)}(z) + \mathbf{z} \int_{z=-\infty}^{\infty} \Delta b_z^{(\mathbf{I}, \mathbf{r}_0)}(z), \end{aligned} \quad (7)$$

となります。 $\mathbf{B}_\alpha = 0$ ゆえ、 $\Delta b_y^{(\mathbf{I}, \mathbf{r}_0)}(z)$, $\Delta b_z^{(\mathbf{I}, \mathbf{r}_0)}(z)$, の値は分かりませんが、式 (7) の第 2 項と第 3 項は 0 になりますので、

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}_0) = \mathbf{x} \int_{z=-\infty}^{\infty} \Delta b_x^{(\mathbf{I}, \mathbf{r}_0)}(z), \quad (8)$$

$$\int_{z=-\infty}^{\infty} \Delta b_y^{(\mathbf{I}, \mathbf{r}_0)}(z) = 0, \quad (9)$$

$$\int_{z=-\infty}^{\infty} \Delta b_z^{(\mathbf{I}, \mathbf{r}_0)}(z) = 0, \quad (10)$$

を得ることができます。よって、直線定常電流の作る磁場の結果式 (1) から微小電流が作る磁場の算出においては、式 (9)、(10) より、 $\Delta b_y^{(\mathbf{I}, \mathbf{r}_0)}(z)$ と $\Delta b_z^{(\mathbf{I}, \mathbf{r}_0)}(z)$ は具体的に求めることができませんが、微分方程式 (8) より、 $\Delta b_x^{(\mathbf{I}, \mathbf{r}_0)}(z)$ は具体的に算出できる可能性が得られました。

式 (8) と式 (5) から、

$$\mathbf{x} \int_{z=-\infty}^{\infty} \Delta b_x^{(\mathbf{I}, \mathbf{r}_0)}(z) = \frac{\mu_0 \mathbf{I} \times \widetilde{\mathbf{r}}_0}{2\pi r_0}, \quad (11)$$

という微分方程式を得ます。式 (11) の右辺より、関数 $\Delta b_x^{(\mathbf{I}, \mathbf{r}_0)}(z)$ は電流値 I に比例すると考えられます。また、微少領域の大きさを表す Δz も、微少領域内の電荷量と線形的な関係があるので、関数 $\Delta b_x^{(\mathbf{I}, \mathbf{r}_0)}(z)$ は Δz に比例すると考えられます。これを仮定 B と置きます。つまり、

$$\Delta b_x^{(\mathbf{I}, \mathbf{r}_0)}(z) \propto I \Delta z, \quad (\text{仮定 B}) \quad (12)$$

と記述できます。そこで、適切な関数を $F^{(\mathbf{r}_0)}(z)$ を導入して、

$$\Delta b_x^{(\mathbf{I}, \mathbf{r}_0)}(z) = F^{(\mathbf{r}_0)}(z) I \Delta z, \quad (13)$$

という形で記述しましょう。さらに、 $F^{(\mathbf{r}_0)}(z)$ は r_0 と θ の変数分離形で関数表示できると仮定 C を置きます¹。

$$F^{(\mathbf{r}_0)}(z) = f(r_0)g(\theta), \quad (\text{仮定 C}) \quad (14)$$

式 (12) と (14)； — 仮定 B と仮定 C より、—

$$\Delta b_x^{(\mathbf{I}, \mathbf{r}_0)}(z) = f(r_0)g(\theta) I \Delta z, \quad (15)$$

となります。

式 (11) に、式 (15) 代入すると、

$$\mathbf{x} \int_{z=-\infty}^{\infty} f(r_0)g(\theta) I \Delta z = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\mathbf{I} \times \tilde{\mathbf{r}}_0}{r_0}. \quad (16)$$

式 (16) の左辺の積分を実行するために、被積分関数は、 z を消去し θ のみで記述します。そのために、前述の“変数の再設定”から、下に示す式 (17) ~ (19) を書き下し、 $z \rightarrow \theta$ の変数変換を実行します。

$$z = \frac{r_0}{\tan \theta}, \quad (17)$$

$$\frac{dz}{d\theta} = -\frac{r_0}{\sin^2 \theta}, \quad (18)$$

$$r = \frac{r_0}{\sin \theta}, \quad (19)$$

ゆえに、式 (16) の左辺は、

$$\mathbf{x} \int_{z=-\infty}^{\infty} f(r_0)g(\theta) I dz = \mathbf{x} \int_{\theta=\pi}^0 I f(r_0)g(\theta) \frac{-r_0}{\sin^2 \theta} d\theta = \mathbf{x} I r_0 f(r_0) \int_{\theta=0}^{\pi} \frac{g(\theta)}{\sin^2 \theta} d\theta. \quad (20)$$

$$\therefore \Rightarrow \underbrace{I r_0 f(r_0) \int_0^{\pi} \frac{g(\theta)}{\sin^2 \theta} d\theta}_{\Delta\theta} = -\frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{r_0}, \quad (21)$$

繰り返しますが、式 (21) は x 方向での関係です。上式の波線部は定積分値ですから、 $f(r_0)$ の関数型は適当な定数 c_f を用いて、

¹ $z \rightarrow \theta$ へと変数変換すると、積分領域を有限にできます。これにより、積分領域は $z = [-\infty, \infty] \rightarrow \theta = [-\pi, 0]$ へと変換されます。式 (17) から (19) で変数変換を行なっています。

また、変数分離形にできる根拠はありません。いきなり $F^{(\mathbf{r}_0)}(\theta)$ で考えることは、不可能なので、このように仮定しましたが、これは物理の常套手段です。最終的に得られる $F(r, \theta)$ は、 $F^{(\mathbf{r}_0)}(z) \approx f(r)g(\theta)$ の可能性があります。得られた $F(r, \theta)$ の物理的な妥当性は、最終的な関数形から実験値を説明できるかで考えなくてはなりません。

$$f(r_0) = -c_f \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{1}{r_0^2}, \quad (22)$$

ただし、

$$\frac{1}{c_f} = \int_0^\pi \frac{g(\theta)}{\sin^2 \theta} \Delta\theta, \quad (23)$$

と表せます。式 (22) が、式 (15) で定義した r_0 の関数 $f(r_0)$ です。

次に、 $g(\theta)$ を決定すれば、式 (15) により、仮定 B, C の下での $\Delta b_x^{(\mathbf{I}, r_0)}(z)$ を決定できます、式 (23) の値が定義できるためには、積分領域内で、

$$\frac{g(\theta)}{\sin^2 \theta}, \quad (24)$$

が発散しないというなどの条件が必要になり、ここから関数型が規定されます。具体的に関数 $g(\theta)$ にアプローチするためには、 $g(\theta)$ を予測して見当を付けるしかありません。

$g(\theta)$ についての予測見当

- 離れば離れるほど (θ が 0 や π に近くほど) に、物理的影響が弱まる。→ 観測点 R_0 から遠方に対応する $\theta = 0, \pi$ に近づくにつれ、被積分関数 ($g(\theta)/\sin^2 \theta$) は 0 に近づくべきである。
- 積分領域 $[0, \pi]$ で発散しないためには、被積分関数の分母の $\sin^2 \theta$ が消えなければならない。なぜならば、積分領域境界の $\theta = 0, \pi$ で、分母の $\sin 0 = \sin \pi = 0$ となり、被積分関数が発散してしまうから。→ $g(\theta)$ は $\sin^2 \theta$ を因子として持たなければならない。
- 対称性保存則 (仮定 A) から、 $g(\theta)$ は中点 $\pi/2$ に関して対称的か反対称的な関数である。
- 定積分値が 0 にならないために、 $g(\theta)$ は、積分領域の中点 $\pi/2$ に関して奇関数にはならない。したがって、 $g(\theta)$ は偶関数になる。ただし、定積分値が 0 にならない偶関数である。

被積分関数 $g(\theta)/\sin^2 \theta$ が上記の予測見当を全て満たす中で、最も単純な

$$g(\theta)/\sin^2 \theta = \sin \theta, \quad (25)$$

$$(\therefore g(\theta) = \sin^3 \theta) \quad (26)$$

を候補として、 $\Delta b_x^{(\mathbf{I}, r_0)}(z)$ を計算しましょう (§1.4.1 にて検証)。

まず、式 (23) から、

$$\begin{aligned} \frac{1}{c_f} &= \int_{\theta=0}^{\pi} \sin \theta d\theta = 2, \\ \Rightarrow c_f &= \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (27)$$

式 (15) は、式 (27), (22), (26) より、

$$\Delta b_x^{(\mathbf{I}, r_0)}(z) = -\frac{\mu_0 I \sin^3 \theta}{4\pi r_0^2} dz = -\frac{\mu_0 I \sin \theta}{4\pi r^2} dz = -\frac{\mu_0 I \sin \theta}{4\pi r^2} dz, \quad (28)$$

ただし、第 2 式から第 3 式への変形には、式 (19) を使用しました。

仮定 B, C と予測見当から得た関数型；式 (25) から、式 (28) が得られたので、求めた微少区間 Δz の電流が R_0 に作る磁束密度ベクトル；式 (6) は、

$$\Delta \mathbf{b}^{(\mathbf{I}, \mathbf{r}_0)}(z) = \left(-\frac{\mu_0 I \sin \theta}{4\pi r^2} dz, \Delta b_y^{(\mathbf{I}, \mathbf{r}_0)}(z), \Delta b_z^{(\mathbf{I}, \mathbf{r}_0)}(z) \right), \quad (29)$$

$$\text{ただし、} \int_{z=-\infty}^{\infty} \Delta b_y^{(\mathbf{I}, \mathbf{r}_0)}(z) = 0, \int_{z=-\infty}^{\infty} \Delta b_z^{(\mathbf{I}, \mathbf{r}_0)}(z) = 0. \quad (30)$$

と計算されました。これにより、直線定常電流の作る磁束密度ベクトルの実験より得られる式 (1) を算出できます。ただし、そうなるように仮定を立てて算出しただけのことです。

先に結果を言うってしまうのも、はばかれるのですが、実は、

$$\Delta b_y^{(\mathbf{I}, \mathbf{r}_0)}(z) \equiv 0, \quad (31)$$

$$\Delta b_z^{(\mathbf{I}, \mathbf{r}_0)}(z) \equiv 0, \quad (32)$$

なので

$$\Delta \mathbf{b}^{(\mathbf{I}, \mathbf{r}_0)}(z) = \left(-\frac{\mu_0 I \sin \theta}{4\pi r^2} dz, 0, 0 \right) = \frac{\mu_0 \mathbf{I} \times \tilde{\mathbf{r}}}{4\pi r^2} dz, \quad (33)$$

となるのです。これは、実験で調べられています。これらはとても重要なので、検証実験を §1.4.2 に、さらに詳しい考察を §2.3 に記しました。

式 (29) では、仮定 A の可能性 (ア)~(イ) に抵触されないような、 $\Delta b_y^{(\mathbf{I}, \mathbf{r}_0)}(z)$ と $\Delta b_z^{(\mathbf{I}, \mathbf{r}_0)}(z)$ を決定する課題が残ったままです。他方、フライングで与えた式 (33) は、可能性 (ア) が現実を説明するというを示唆します。式 (28) は、実はラプラスによって初めて予測された式ですが、残念ながら、彼の行った予測過程は調べることはできませんでした。しかし、彼ら (ラプラスチーム) も、きっと、この考察と同じように導き出したことでしょう。直線定常電流が作る磁束密度ベクトルをラプラスの予測のもとに実際に実験し、この予測式 (33) を検証した 2 人の人物ビオとサバルの名前を取って、ビオ・サバルの法則式と呼ばれています。この実験については、次章の §1.4.1 で、例題として考えます。

1.3.2 注意点とまとめ

変数 \mathbf{r}_0 は、直線電流の時に意味を持つ変数です。一般の微少電流が作る磁場を見積るビオ・サバル法則式としては、 \mathbf{r} を変数として書き直さなくてはなりません。式 (28) の第 2 式から第 3 式への式変形がその一般化です。式 (33) における変数を右図に記した変数に沿って整理し、そして微少区間電流が作る磁場を書き直すと、

$$\Delta \mathbf{B}(\mathbf{r}, z, \mathbf{I}) = \frac{\mu_0 \mathbf{I} \times \tilde{\mathbf{r}}}{4\pi r^2} dz = \frac{\mu_0 I \sin \theta}{4\pi r^2} dz (\tilde{\mathbf{I}} \times \mathbf{r}), \quad (34)$$

となり、これが一般に記されているビオ・サバルの法則式です。

ビオ・サバルの法則式は、こうなるであろうという経験則ですが、実は静磁場の根幹にある式と言えます。

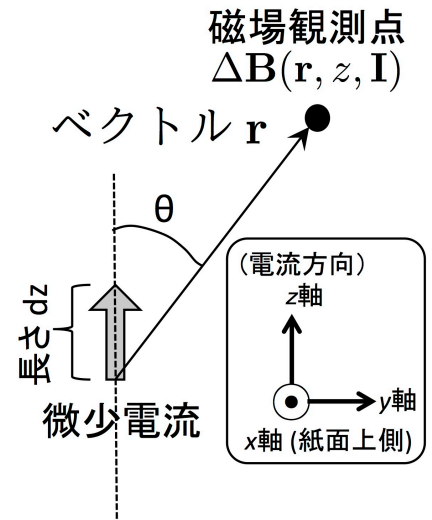


Figure 4: 式 (34) の変数定義