

静電場

目次

1 静電場概論	2
1.1 電位と電場ベクトル	2
1.2 定義 “要暗記”	2
1.3 重力との対応	3
1.4 電位と電場の関係	4
2 クーロンの法則	5
2.1 クーロン力	5
2.2 静電エネルギーと電位	8
3 ガウスの法則と渦なしの法則	12
3.1 法則の概要と表式	12
3.2 ガウスの法則	13
3.2.1 ガウスの法則の導出	13
3.2.2 電位の微分方程式	15
3.3 渦（回転）なしの法則	17
4 電磁気学の背景	20
4.1 ベクトル解析	20
4.1.1 発散（湧き出し）；div	21
4.1.2 勾配；grad	22
4.1.3 回転；rot	22
4.2 微分・積分基礎定理	25
4.2.1 ガウスの定理とガウスの法則	25
4.2.2 ストークスの定理と渦なしの法則	28
4.2.3 定理と法則	30
4.3 電場の誕生	30
5 終わりに	33
5.1 近代の自然科学の発展	33
5.2 自然科学の歩みから考えるこれから	34

平成 27 年 7 月 6 日

1 静電場概論

1.1 電位と電場ベクトル

電場とは

電荷に力を及ぼす空間を電場と呼びます。

- これは電荷によって作られます。
- 電場を作る電荷が静止している時に、その電場を静電場と呼びます。
- 電荷が動いている場合には、磁場を誘導してしまうため(電磁誘導の法則)、電磁場という場(空間)を登場させます(マックスウェルの方程式の登場)。
- 静電場でも電磁場でも電場という言葉は使われますが、このテキストは静電場が対象です。

人間を特定するのに、名前？ 生年月日？ 性別？ 身長？ 体重 etc. がありますね。名前と生年月日、この二つで人間の特定がおおむね取れるので、信販会社や銀行などでは、重宝がられています。この二つは人間を特定するのに、非常に有益な変数と言えます。

では、少し物理的な例をあげると、地球の作る重力は？。これは、地表でおよそ $9.8[\text{m/s}^2]$ という重力加速度を持つのが、特徴でした。これは重力定数という普遍量と地球の質量、そして地球重心(=中心)からの距離によって決まり、測定する場所によって若干の差がある事は高校で習ってきました。

では、電場を特定する量は何か？を考えてみます。その量として、物理学は電位と電場ベクトルと言う量を提案しました。電位はスカラー量で、電場ベクトルはベクトル量です。この2つの量について重力中との対応をまじえ、議論をはじめましょう。

1.2 定義 “要暗記”

電位 V (electrical potential)

電場を特徴付けるスカラー量です。

- ある電場があり、その電場の任意の場所に基準点を設定します。
- その基準点の電位を V_0 と決めます。
- この電場内のある位置(A)に電荷 q を置きます。
- この電荷は基準点に対して位置エネルギー P を持つとすると、

$$P = q(V_1 - V_0) \quad (1)$$

によって、位置 A の電位 V_1 が決定されます。 P を静電エネルギーと呼びます。電位が位置に依存するため、静電エネルギーも位置エネルギーになります。

電場ベクトル \mathbf{E} (electric field vector)

電場を特徴付けるベクトル量です。

注) 場を電場と呼ぶのですが、 \mathbf{E} も電場と呼ばれています。混乱を招くので、このテキストでは \mathbf{E} を電場ベクトルと表記します。

電場では電荷 q を帯びた物体は下式に示した力を受けます。

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}. \quad (2)$$

1.3 重力との対応

- 重力中では質量 m の物体は mg の力を鉛直下方に受けます。したがって、電場での電荷 q は重力中の質量 m に、電場ベクトル \mathbf{E} は重力定数 g (鉛直下方を正としている。) に対応する量です。
- 重力中の位置エネルギー $mg\Delta h$ に対して、電場での静電エネルギーは $q\Delta V$ です。したがって電位 V は $g\Delta h$ に対応する量です。両者とも、保存力場で **経路には依存しません** (§ 3.3 を参照)。

(まとめ) 電場と重力の定数の対応 $q \iff m, \mathbf{E} \iff g, V \iff g\Delta h$

位置エネルギー、静電エネルギーと電位 — 意外と楽しいな サイドメニュー (1) —

この3つの言葉に対する英語とそれぞれの直訳を並べて比べてみましょう。

日本語	英語	直訳
位置エネルギー	potential energy	潜在的なエネルギー
静電エネルギー	electrostatic energy	静電気エネルギー
電位	(electric) potential	(電氣的) 潜在性

全てにおいて、何となく統一感がないのが伝わりますか？

実は、重力の位置エネルギーと静電エネルギーは両方とも位置エネルギーです。重力のエネルギーを単に位置エネルギーとしてしまうのが原因です。静電エネルギー (electrostatic potential energy, 短縮して es-potential energy) を使うのであれば、重力エネルギー (gravitational potential energy, 短縮して g-potential energy) という単語を作り変えても良いと思います。

また、電位が (electric) potential ならば、エネルギーという言葉がはずれますので、単位はジュール [J] ではなく、ボルト [V] である事が連想されやすくなります。ちなみに、重力場であれば、重力位となる量は $g\Delta h$ となります。

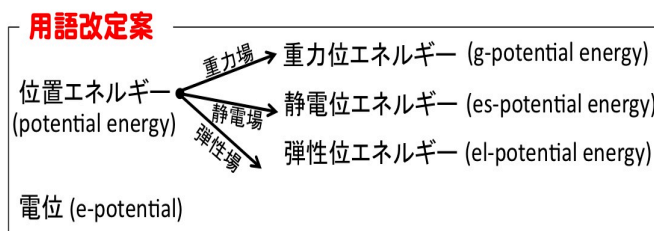
よく間違えてしまうのが、エレクトロンボルト [eV] です。電位かと思ってしまうのですが、これはエネルギーです。その定義は、1つの電子が+1[V]の電位差の間で失うポテンシャルエネルギーで、エネルギー量を表し、 $1[\text{J}] = 6.2415 \times 10^{18} [\text{eV}]$ と換算されます。確かに、eV(電荷×電位)はエネルギーですが、用語の整理もそろそろ必要ではないかと感じます。

ちなみに、弾性エネルギー (バネ定数 k のバネ振動に対しての位置エネルギー $1/2kx^2$) も位置エネルギーで elastic energy と英語で表現されます。

歴史的に一番最初に考察が進んだのが重力だったので、重力だけ特別扱いなのは仕方がないでしょう。ニュートン力学を発展させてポテンシャルという言葉は初めて用いたのが1828年にジョージ グリーンと言われています。電場や磁場などの本格的な研究は、これよりも10年以上後のことですので、電磁気用語がこれらの研究を模倣して作られた結果でしょう。

位置エネルギーは位置に依存するエネルギーですが、**移動の際のエネルギー変化が最初と最後の位置により決定でき、移動する経路によらないような空間**において定義できるエネルギーです。そのような現象を引き起こす空間を保存力場と呼びます。そ

して、重力場 (あえて使いました。)、静電場、調和振動子の場もすべて保存力場となります (§ 3.3 参照)。例えば、こんな用語に変えたら良いと思う案を右図に示します。



1.4 電位と電場の関係

一般に、力学系では、

(関係 A)

外力 (\mathbf{F}) を受けて、対象物が微小変位 ($\delta\mathbf{r}$) した場合、外力から対象物がなされる仕事 (δW) は、

$$\delta W = \mathbf{F} \cdot \delta\mathbf{r}, \quad (3)$$

物体が \mathbf{r}_1 から \mathbf{r}_2 に移動した場合、なされた仕事の総量 (W) は、式 (3) を \mathbf{r}_1 から \mathbf{r}_2 にかけて積分した量なので、

$$W = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \delta W = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F} \cdot \delta\mathbf{r}, \quad (4)$$

となります。

(関係 B)

位置エネルギー (P) となされた仕事 (W) の関係は、

$$W = P(\mathbf{r}_2) - P(\mathbf{r}_1), \quad (5)$$

です。

この力学の一般論は、静電エネルギーにもあてはめることができます。その事を考えるために、下記のような設定を設けましょう。

電位 $V(\mathbf{r})$ と電場ベクトル $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ で記述される電場内を電荷 q が \mathbf{r}_1 から \mathbf{r}_2 に移動しました。

この設定下では、外力 \mathbf{F} は電場から受ける力 $q\mathbf{E}(\mathbf{r})$ に対抗する力なので、 $\mathbf{F} = -q\mathbf{E}(\mathbf{r})$ となり、式 (4) に代入すると

$$W = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} -q\mathbf{E} \cdot \delta\mathbf{r}, \quad (6)$$

となります。

他方、式 (5) は電場中での静電エネルギーの変化なので、式 (1) を用いて、

$$W = P(\mathbf{r}_2) - P(\mathbf{r}_1) = q\{V(\mathbf{r}_2) - V(\mathbf{r}_1)\}, \quad (7)$$

と求めることができます。

ここで、

$$\begin{cases} \mathbf{r}_1 = (x_1, y_1, z_1), & \mathbf{r}_2 = (x_2, y_2, z_2), \\ \delta\mathbf{r} = (\delta x, \delta y, \delta z), & \mathbf{E} = (E_x, E_y, E_z), \end{cases}$$

とすると、式 (6) と式 (7) から、

$$q\{V(\mathbf{r}_2) - V(\mathbf{r}_1)\} = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} -q\mathbf{E} \cdot \delta\mathbf{r}, \quad (8)$$

ゆえに、

$$V(\mathbf{r}_2) - V(\mathbf{r}_1) = - \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{E} \cdot \delta\mathbf{r} = - \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} (E_x, E_y, E_z) \cdot \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta z \end{pmatrix} = - \int_{x_1}^{x_2} E_x dx - \int_{y_1}^{y_2} E_y dy - \int_{z_1}^{z_2} E_z dz, \quad (9)$$

となり、

$$\boxed{V(\mathbf{r}_2) - V(\mathbf{r}_1) = - \left(\int_{x_1}^{x_2} E_x dx + \int_{y_1}^{y_2} E_y dy + \int_{z_1}^{z_2} E_z dz \right)}, \quad (10)$$

という重要な式を得る事ができます。式 (10) は**電位の変化量は方向 $(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)$ に依存するスカラー量**である事を、表しています。

x 方向の電位差を求める場合は、 $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 + (\delta x, 0, 0)$ とすれば良いのです。(式 (10) の右辺) の成分計算値は、 $y_1 = y_2$, $z_1 = z_2$ なので、 y, z についての積分値は0になります。したがって、式 (10) は、

$$V(x_1 + \delta x, y_1, z_1) - V(x_1, y_1, z_1) = - \int_{x_1}^{x_1 + \delta x} E_x dx, \quad (11)$$

となります。この式の両辺を δx で割って、 $\delta x \rightarrow 0$ の極限を取るという操作をすると、 $\frac{\partial V}{\partial x}$ が得られます。これに
したがって、

$$\left. \frac{\partial V}{\partial x} \right|_{(x_1, y_1, z_1)} = \lim_{\delta x \rightarrow 0} \frac{V(x_1 + \delta x, y_1, z_1) - V(x_1, y_1, z_1)}{\delta x} = - \lim_{\delta x \rightarrow 0} \frac{\int_{x_1}^{x_1 + \delta x} E_x dx}{\delta x} = -E_x(x_1, y_1, z_1),$$

と計算されるので、 (x_1, y_1, z_1) での電位 V の x 方向の偏微分値は、電場ベクトルの x 成分 $-E_x(x_1, y_1, z_1)$ になります。まとめると、**電場ベクトルの x 成分が電位 V の x 方向の位置変化率**である事がわかります。

同様な計算を y 方向と z 方向について行くと、 y, z 方向の電位 V の偏微分値と電場の関係は、

$$\left. \frac{\partial V}{\partial y} \right|_{(x_1, y_1, z_1)} = -E_y(x_1, y_1, z_1), \quad \left. \frac{\partial V}{\partial z} \right|_{(x_1, y_1, z_1)} = -E_z(x_1, y_1, z_1) \quad (12)$$

となり、電位 (V) と電場 (\mathbf{E}) の関係式が得られます。

電位 (V) と電場 (\mathbf{E}) の関係

$$E_x(\mathbf{r}) = -\frac{\partial V(\mathbf{r})}{\partial x}, \quad E_y(\mathbf{r}) = -\frac{\partial V(\mathbf{r})}{\partial y}, \quad E_z(\mathbf{r}) = -\frac{\partial V(\mathbf{r})}{\partial z} \implies \mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla V(\mathbf{r}) \quad (13)$$

電位の位置変化率が電場ベクトルであり、それは求める方向に依存します。

数学的表記については、§ 3.1 で説明します。

2 クーロンの法則

2.1 クーロン力

クーロン力とは二つの電荷 q_1, q_2 の間に働く力のことです [1]。クーロンの法則とクーロン力を定義は、

[1] 静電場の概念の確立よりもクーロン力の方が数十年早く発見されていました。歴史的には、クーロン力が電磁気学の原点です。このテキストでは話が前後している事を心に留めておいてください。

クーロンの法則

二つの電荷 q_1, q_2 の間に働く力 \mathbf{F} は向きが両電荷をつなぐ方向で、その大きさが電荷間距離 r の二乗に反比例し、電荷量に比例します。

式で表すと、

$$|\mathbf{F}| = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q_1 q_2}{r^2} \cdot \left(\frac{\overrightarrow{q_1 q_2}}{r} \right), \quad (14)$$

方向は、**引力方向**であれば**負の値**、**斥力（反発力）**であれば**正の値**になります^a。 ϵ は電荷の置かれている空間の誘電率です^b。

^a 2電荷間のクーロン力は基本的にベクトル表示がなされず、方向は正負の符号で表されます。

^b 真空中であれば真空中の誘電率 ϵ_0 と書かれます。

$$\epsilon_0 = 8.854187817620 \times 10^{-12} [\text{C/Vm}] \quad (15)$$

では、

固定された1つの点電荷 q_1 によって作られる電場によって、別の1つの電荷 q_2 がどのような力 \mathbf{F}_2 を受けるか？

という観点でクーロンの法則を解釈してみましょう。

固定された電荷 q_1 によって作られる電場ですから、この電場は静電場です。この時、電荷 q_1 を原点として、電荷 q_2 の位置を \mathbf{r}_2 としましょう。

$$\mathbf{F}_2 = q_2 \cdot \left\{ \frac{q_1}{4\pi\epsilon \cdot |\mathbf{r}_2|^2} \cdot \tilde{\mathbf{r}}_2 \right\}, \quad (16)$$

$$\text{ただし、} \tilde{\mathbf{r}}_2 = \frac{\mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_2|}.$$

両電荷が同符号の電荷だった場合は、式 (16) のベクトルの係数の部分が正の値になるため、電荷 q_2 は q_1 から離れる方向に移動する事が読み取れます。両者が異符号の電荷だった場合は、同様に考えて引力になる事が導けます。

電荷 q_1 によって作られる電場が電荷 q_2 に作用する力 \mathbf{F}_2 は、

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}_2) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon \cdot |\mathbf{r}_2|^2} \cdot \tilde{\mathbf{r}}_2, \quad (17)$$

と置くと、

$$\mathbf{F}_2 = q_2 \mathbf{E}(\mathbf{r}_2), \quad (18)$$

と書き表せます^[2]。 $\mathbf{E}(\mathbf{r}_2)$ が、一つの点電荷によって作られる電場の電場ベクトルですが、**極めて単純**です。その電場の特徴を列記しましょう。

1つの電荷(q_1 により作られる) 電場ベクトル \mathbf{E} の特徴

- 大きさは $|\mathbf{r}_2|$ のみの変数で表せます。
- 方向は電荷から放射線状に広がります (球対称です。)
- あえて、 $\mathbf{r}_2 = (x, y, z)$ の3個の成分を持ち出すと

$$\mathbf{E}(x, y, z) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon \cdot (x^2 + y^2 + z^2)} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} (x, y, z) \quad (19)$$

と書き換えられます。

^[2]これが、§1.2 式 (2) で先取りして学んだ内容の裏付けです。

では、式 (9) の波線部を使って、固定された電荷 q_1 が作る電場内で、電荷 q_2 が \mathbf{r}_s から \mathbf{r}_e まで移動した時の電位差 $\Delta V = V(\mathbf{r}_e) - V(\mathbf{r}_s)$ を求めましょう。 $|\mathbf{r}_2| = r_2$ と記述します。

$$\begin{aligned} \Delta V = V(\mathbf{r}_e) - V(\mathbf{r}_s) &= - \int_{\mathbf{r}_s}^{\mathbf{r}_e} \mathbf{E}(\mathbf{r}_2) \cdot d\mathbf{r} = - \int_{\mathbf{r}_s}^{\mathbf{r}_e} \frac{q_1}{4\pi\epsilon r_2^2} \tilde{\mathbf{r}}_2 \cdot d\mathbf{r} = - \frac{q_1}{4\pi\epsilon} \int_{r_s}^{r_e} \frac{1}{r_2^2} dr_2, \\ &\quad (\tilde{\mathbf{r}}_2 \cdot d\mathbf{r} = dr_2 \text{ となるため、原点からの距離の変化が積分変数になります。}) \\ &\quad \text{これに伴い、} \mathbf{r}_s \rightarrow r_s, \mathbf{r}_e \rightarrow r_e \text{ とベクトルからスカラーに変換されます。)} \\ &= \frac{q_1}{4\pi\epsilon} \left[1/r + \text{const.} \right]_{r_s}^{r_e} \end{aligned} \tag{20}$$

$$= \frac{q_1}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{r_e} - \frac{1}{r_s} \right). \tag{21}$$

式 (20) はとても大切な事が記述されています。それは、点電荷 q_1 が作る電位 $V(r)$ は

$$V(r) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon} \frac{1}{r} + \text{const.}, \tag{22}$$

であるという事です。積分定数 const は、境界条件により決定されます。この場合、よく使われる境界条件 (キメゼリフ) は、電位は無遠方で0になる です。この境界条件の下では、 $\text{const} = 0$ になり、式 (22) は

$$V(r) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon} \frac{1}{r}, \tag{23}$$

となります。ちなみに、初期位置と終位置の決まった2点間での電位差 ΔV は、境界条件には関係なく、式 (21) を使って算出します。

固定された1つの電荷 (q_1) により作られる電位 V とその特徴

$$V(r) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon} \frac{1}{r} + \text{const.}, \tag{24}$$

電位は電荷からの距離に反比例する項と定数項 const からなります。
 const は境界条件から求める事ができ、電位基準をどこにしたかのみに依存する定数です。
 無限遠を0という基準の場合は、電位は電荷からの距離に**反比例**する事になります。

例題1 電位式 (24) と式 (13) を使って電場ベクトルが式 (19) になるのを計算して下さい。

(解)

$$\begin{aligned} E_x &= - \frac{\partial V(\mathbf{r})}{\partial x} = - \frac{\partial}{\partial x} \frac{q_1}{4\pi\epsilon r} = - \frac{q_1}{4\pi\epsilon} \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r} = - \frac{q_1}{4\pi\epsilon} \left(\frac{\partial r}{\partial x} \right) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \right) \\ &= - \frac{q_1}{4\pi\epsilon} \left(\frac{\partial \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{\partial x} \right) \cdot \left(- \frac{1}{r^2} \right) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{1}{r^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} (2x) \\ &= \frac{q_1}{4\pi\epsilon r^2} \cdot \frac{x}{r}. \end{aligned}$$

同様に、

$$E_y = \frac{q_1}{4\pi\epsilon r^2} \cdot \frac{y}{r}, \quad E_z = \frac{q_1}{4\pi\epsilon r^2} \cdot \frac{z}{r},$$

ゆえに、

$$\mathbf{E} = (E_x, E_y, E_z) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon r^2} \cdot \frac{1}{r} (x, y, z).$$

ここで、 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ と $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ を上式に代入すると、

$$\mathbf{E} = \frac{q_1}{4\pi\epsilon (x^2 + y^2 + z^2)} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} (x, y, z). \quad (\text{計算終わり。})$$

2.2 静電エネルギーと電位

クーロン力の電位はすでに式 (22) から (24) に算出結果を示しました。

電荷 q_1 によって作られる電場 (電位 V) 内に電荷 q_2 が存在する時、電位の境界条件を、”無限遠で0になる” とすると、電荷 q_2 の静電エネルギー P は V と電荷 q_2 の積 q_2V になります。したがって、静電エネルギー P は、

$$P = q_2V = \frac{q_1q_2}{4\pi\epsilon r} \quad (25)$$

となります。

式 (25) に沿って、 q_1 が正電荷だった場合 を考えましょう。

作られる電場の電位は常に正の値です。しかし、 q_2 の電荷が正か負かで、静電エネルギーの符号は変化します。

q_2 が q_1 と同じ正電荷だった場合には静電エネルギーは常に正の値になり、この二つの電荷が近づくほど (r が減少するほど) 静電エネルギーが大きくなります。つまり、二つの電荷が近づくためには、静電エネルギーの分だけ運動エネルギーが減少するとか、外力を加える必要などがあります。そして、この場合を式 (16) にあてはめると、クーロン力は $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = (\text{正の係数}) \cdot \mathbf{r}_2$ となります。よって、電荷 q_2 の受けるクーロン力は位置 \mathbf{r}_2 を始点に (正の係数) \mathbf{r}_2 となりますので、電荷 q_1 がおかれた原点と反対向きのクーロン力が発生する事になります。つまり、クーロン力は斥力になります。

一方で、 q_2 が q_1 と異なる負電荷だった場合には、静電エネルギーは常に負の値になり、この二つの電荷が近づくほど (r が減少するほど) 静電エネルギーが小さくなります。クーロン力は $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = (\text{負の係数}) \cdot \mathbf{r}$ となるので、引力のクーロン力になります。

電荷 q_1 と q_2 の正負の組み合わせによる、電位、静電エネルギー、クーロン力の符号を表 2.2 にまとめてみました。

静電エネルギーの増減と物理現象について少し触れてみます。

静電エネルギーの変化量 $\Delta P = q_2\Delta V < 0$ ならば、電荷に蓄えられた静電エネルギーが失われると同時に別のエネルギーになります。普通、何の仕掛けもなければ電荷自体の運動エネルギーになりますが、固体中を駆け巡る電子が荷電粒子であった場合、その電子の経路に抵抗の大きい電熱線 (ニクロム線など) を配置すれば、静電エネルギーが熱エネルギーに変換される事になります。電力会社はこれとは反対に色々なエネルギーを電気エネルギーに変換して、私たちに供給してくれるわけです。

$\Delta P = q_2\Delta V > 0$ ならば、電荷に静電エネルギーが蓄えられると同時に別のエネルギーが減るか、もしくは加えられる必要があります。電荷 q_1 と電荷 q_2 が同符号の場合は、電荷 q_2 の静電エネルギーは両者が近づくほど高くなります。もし、電荷 q_2 の運動エネルギーが静電エネルギーに変換されるのであれば、両者が近づくにつれて、電荷 q_2 の速度は遅くなり、速度が0になった時に、両電荷に働く斥力で跳ね返されます。ラザフォード散乱と呼ばれる、原子番号の大きい物質にアルファ線 (He 原子核の粒子線で二価の正電荷粒子、 q_2 に相当) を照射すると背面散乱が起こるのは、このためです。この場合、相手の電荷 (q_1) は q_2 にくらべてとても大きい質量と電荷を持つ必要があります (原子番号の大きい物質という条件でこれを保証します。)

表 1. 電荷 q_2 と q_1 、電位、静電エネルギー、クーロン力の符号

測定対象	q_2		2つの電荷状態	
	\oplus	\ominus		
電位	+		\oplus	q_1
静電エネルギー	+	-		
クーロン力	+ (斥力)	- (引力)		
電位	-		\ominus	
静電エネルギー	-	+		
クーロン力	- (引力)	+ (斥力)		

例題 2

電荷 $+e$ が固定されている場合に、まわりに出来る静電場の電位と、電子 $-e$ が受ける静電エネルギーを距離 0.3\AA から 10\AA の範囲で計算してください。電位は、この電荷 $+e$ から無限遠方で0になります。

(解) 電位 $V(r)$ は、正の電荷が作る電位なので、全ての空間で正の値を取り、

$$V(r) = \frac{e}{4\pi\epsilon r} = 14.406 \frac{1}{r[\text{\AA}]} [\text{V}] \quad (26)$$

と計算されます。ここで、

$$e = 1.602 \times 10^{-19} [\text{C}], \quad \epsilon = \text{空気中の誘電率は真空中と同じ値 } 8.854 \times 10^{-12} [\text{C/Vm}].^{[3]}$$

静電ポテンシャル $P(r)$ は、電位に負の電荷値 $-e$ をかけた値ですので、常に負の値になり、

$$P(r) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon r} [\text{ジュール}] = -\frac{e}{4\pi\epsilon r} [\text{eV}]^{[4]} = -14.406 \frac{1}{r[\text{\AA}]} [\text{eV}], \quad (27)$$

と計算されます。

これに沿って、計算された電位 $V(r)[\text{V}]$ と静電ポテンシャル $P(r)[\text{eV}]$ を下図に示します。

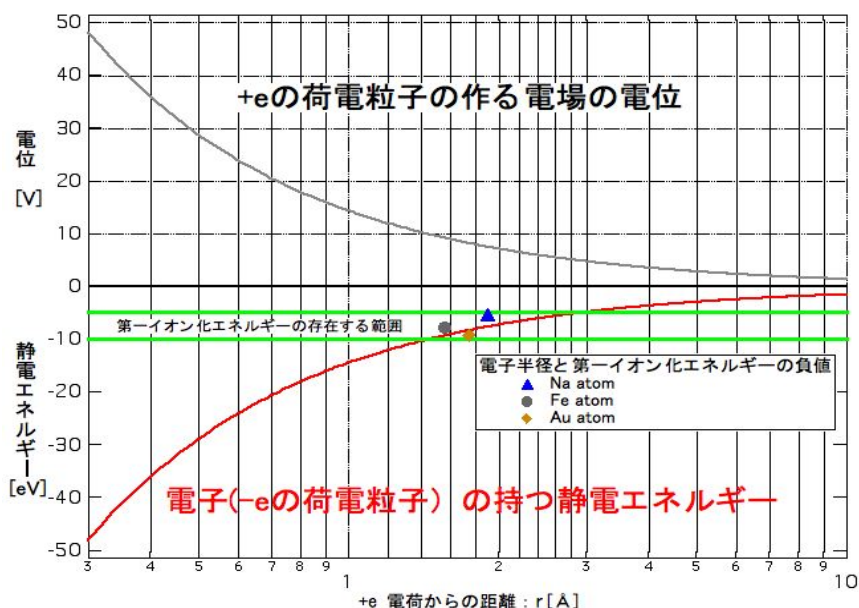


図 1: 固定されている $+e$ 電荷の作る静電場の電位 と電場中の電子 $-e$ の静電エネルギー

図 1 の補足

金属原子では1つの電子を無限遠に離すのに必要なエネルギーを第一イオン化エネルギーと定義し、およそ $5[\text{eV}] \sim 10[\text{eV}]^{\text{a}}$ 程度です。原子半径 (共有結合半径)^b はナトリウム、鉄、金で $1.90\text{\AA}(2.27\text{\AA})$ 、 $1.56\text{\AA}(1.26\text{\AA})$ 、 $1.74\text{\AA}(1.44\text{\AA})$ となります。実は、軌道電子の静電エネルギーとこの第一イオン化エネルギーはほぼ一致しています。

金を例にとり説明しましょう。ウィキペディアで調べると、金の第一イオン化エネルギーは $890[\text{KJ/mol}]$ なので、 $[\text{eV}/\text{原子}]$ の単位で表すと $9.2[\text{eV}/\text{原子}]$ です。また、式 (27) から原子半径 1.74\AA の位置の電子が持つ静電エネルギーを計算すると $-8.3[\text{eV}]$ です。したがって、 $8.3[\text{eV}]$ よりも大きなエネルギーを与えたら、金原子から最外殻の1つの電子を離せると言う事です。しかし、金の第一イオン化エネルギーは $9.2[\text{eV}/\text{原子}]$ という値ですから、イオン化するためには、静電エネルギーの計算値より、約 $1[\text{eV}]$ 大きいエネルギーが必要であることがわかります。これは、軌道電子の持つポテンシャルエネルギーが静電エネルギー以外のエネルギーの寄与を受けて、軌道電子である事がより安定である事を示唆します。しかし、おおむね両エネルギー値は一致していると考えて良いと思いますので、原子の中心に点電荷 $+e$ があり、それによる静電場の寄与が、軌道電子に対しては主体であるという結論が下せます。点電荷 $+e$ が固定されているというのは、 $+e$ が電子に比べて重い原子核の構成する合算電荷であるために保証されます。

また、原子が共有結合状態にあった場合には、金で言えば () 内の 1.44\AA という値が原子半径になり、この距離に対応する静電エネルギーは $-10.0[\text{eV}]$ です (式 (27) から算出)。つまり、イオン化はますます難しい方向に行きます。つまり、共有結合されていれば、イオン化しにくいのです。

^a使用される単位は、化学の分野なので $[\text{KJ/mol}]$ が使われている事が多く、 500KJ/mol から 1000KJ/mol だそうです。原子1個あたりのエネルギーとして $[\text{eV}]$ を使った $[\text{eV}/\text{原子}]$ と $[\text{KJ/mol}]$ の換算式は $n[\text{KJ/mol}] \Rightarrow n \times 0.01034[\text{eV}/\text{原子}]$ です。 $1[\text{J}] = 6.2415 \times 10^{18} [\text{eV}]$, アボガドロ数は $6.022 \times 10^{23} [\text{個}]$ から、換算係数 $0.01034 = \frac{1000 \times 6.2415 \times 10^{18}}{6.02 \times 10^{23}}$ を算出しました。

^bhttps://www.hulinks.co.jp/support/c-maker/qa_05.html より引用した値です。原子半径とは、独立し、荷電していない状態の原子、すなわち電子の結合状態に影響されないときの原子の大きさを表します。この説明も同サイトよりの引用です。

例題3 (計算が煩雑です。)

二次元平面上で 5\AA の正三角形の頂点に $+e$ の電荷が配置されています。この3つの電荷が作る電場の等電位線を描いてください。電位は、この3つの電荷から無限遠方で0になります。

(解) この正三角形の重心を原点とします。それぞれの電荷の位置を P_1, P_2, P_3 とした時、二次元極座標によって、この3点は下式のように表すことができます。

$$P_1 = (5[\text{\AA}], 90[\text{deg}]), P_2 = (5[\text{\AA}], 210[\text{deg}]), P_3 = (5[\text{\AA}], 330[\text{deg}]).$$

これを図示すると、図2の様になります。

任意の点 $P(r[\text{\AA}], \phi[\text{deg}])$ での電位 $V(r[\text{\AA}], \phi[\text{deg}])$ は、

$$\begin{aligned} V(r[\text{\AA}], \phi[\text{deg}]) &= \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{e}{PP_1} + \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{e}{PP_2} + \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{e}{PP_3} = \frac{e}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{PP_1} + \frac{1}{PP_2} + \frac{1}{PP_3} \right) \\ &= \frac{e}{4\pi\epsilon} \left\{ \{r^2 - 2rr_0 \sin \phi + r_0^2\}^{-\frac{1}{2}} + \{r^2 - 2rr_0 \sin(\phi + 120^\circ) + r_0^2\}^{-\frac{1}{2}} + \{r^2 - 2rr_0 \sin(\phi + 240^\circ) + r_0^2\}^{-\frac{1}{2}} \right\} \\ &= \frac{e}{4\pi\epsilon r_0} \left\{ \left\{ \left(\frac{r}{r_0}\right)^2 - 2\frac{r}{r_0} \sin \phi + 1 \right\}^{-\frac{1}{2}} + \left\{ \left(\frac{r}{r_0}\right)^2 - 2\frac{r}{r_0} \sin(\phi + 120^\circ) + 1 \right\}^{-\frac{1}{2}} + \left\{ \left(\frac{r}{r_0}\right)^2 - 2\frac{r}{r_0} \sin(\phi + 240^\circ) + 1 \right\}^{-\frac{1}{2}} \right\}, \end{aligned}$$

ここで、上式の下線部を $\Phi(\lambda, \phi)$ と定義して整理します。ただし、 $\lambda = r/r_0$ としました。この問題では、 $r_0 = 5[\text{\AA}]$ です。

また、 ϵ を式 (15) とすると、 $\frac{e}{4\pi\epsilon} = 1.602 \times 10^{-19}[\text{C}]/(4 \times 3.14 \times 8.854 \times 10^{-12})[\text{C/Vm}] = 1.441 \times 10^{-9}[\text{Vm}] = 14.41[\text{V}\text{\AA}]$ です。ここで、 $V_0 = \frac{e}{4\pi\epsilon r_0} (=2.882[\text{V}])$ とすると、

$$V(r[\text{\AA}], \phi[\text{deg}]) = V_0 \Phi(\lambda, \phi) \quad (\star)$$

となります。

この3つの電荷の配置は正三角形のため、対称性により式(☆)の (r, ϕ, V) の数値計算は、 $30[\text{deg}] < \phi < 90[\text{deg}]$ の範囲で行えばよくなります。全体はそれを鏡映して、繰り返したものとなります。対称性の考察について、図2に詳しく説明しましたので、じっくり読んでください。実際に、 $\phi = 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90[\text{deg}]$ の各場合で、 $\Phi(\lambda, \phi)$ の λ 依存を計算し、図3に記しました。

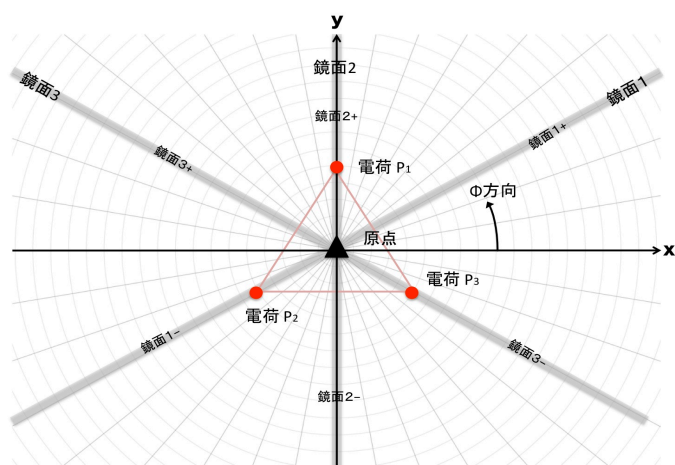


図2: 3つ電荷 (+e) の位置と幾何学的関係

- (1) 3つの電荷が正三角形に置かれており、重心を原点と定めた事により、この平面空間では原点を通り平面に垂直な軸に三回軸が生じます。そのため、(対称性の慣例に従って) 原点を▲で表しました。
- (2) また、 y 軸が鏡面(棒)になっているのがわかりますね。先ほどの三回軸をこの鏡面にあてはめると、他に2つの鏡面が存在する事が導かれます。
- (3) 三回軸は全部を調べなくても、(連続した) $1/3$ の領域 (120 度) が順次3回繰り返されるという事ですから、第一象限の鏡面1 (鏡面1+) と第二象限の鏡面3 (鏡面3+) の間を調べれば良い事になります。
- (4) さらに、この区間の中心に鏡面2 (鏡面2+) があるため、鏡面1+から鏡面2+の60度の部分が鏡面2+から鏡面3+の間で映し出されることとなります。
- (5) 従って、等電位線の数値計算としては、鏡面1+から鏡面2+の60度だけを求めれば良い事になります。後は、鏡映させて繰り返して(♪)という操作を行えば良い事になります。したがって、 ϕ が $30[\text{deg}], 150[\text{deg}], 270[\text{deg}]$ では $\Phi(\lambda, \phi)$ は ϕ が違っても、 r 依存が等しくなります。同様に $\phi = (40, 20, 160, 280, 140, 260), (50, 10, 170, 290, 130, 250), (60, 0, 120, 240, 180, 300), (70, 110, 190, 310, 230, 350), (89, 100, 200, 320, 220, 340), (90, 210, 330)$ の組み合わせでも、 r 依存が等しくなります。

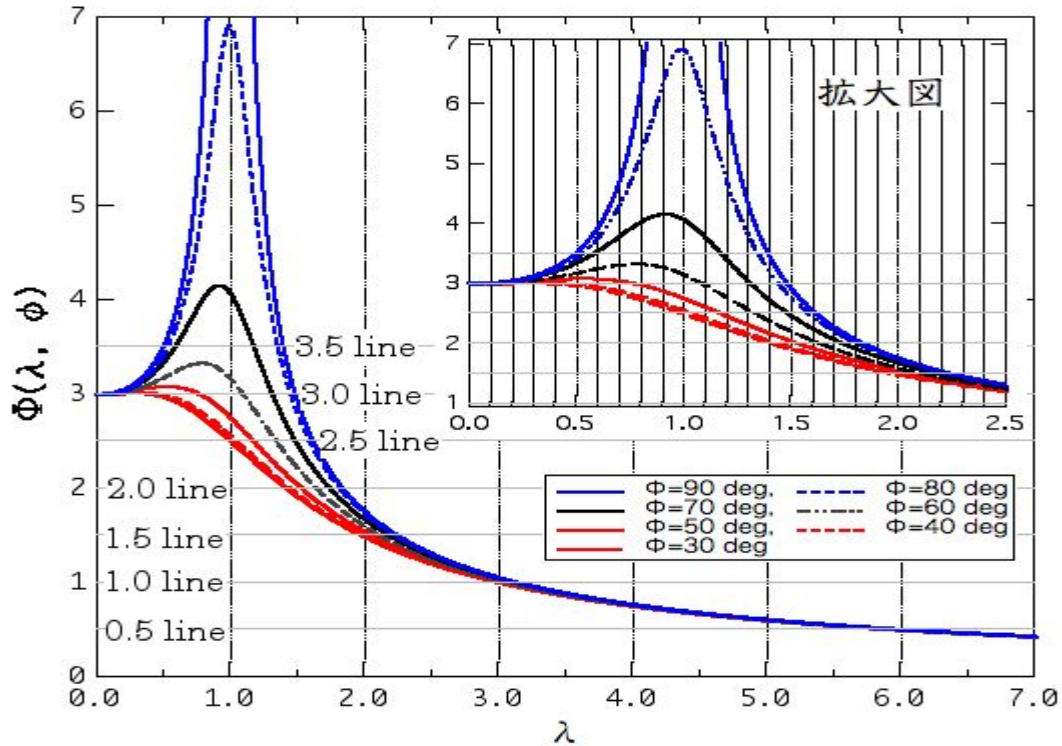


図 3: $\Phi(\lambda, 30[\text{deg}])$, $\Phi(\lambda, 30[\text{deg}])$, $\Phi(\lambda, 30[\text{deg}])$, $\Phi(\lambda, 30[\text{deg}])$, $\Phi(\lambda, 30[\text{deg}])$, $\Phi(\lambda, 30[\text{deg}])$, $\Phi(\lambda, 30[\text{deg}])$ の λ 依存

図 3 から、 $\Phi(\lambda, \phi)=3.5, 3.0, 2.5, 2.0, 1.5, 1.0, 0.5$ になる λ 値を読み取りました。なぜなら、方程式 (☆) は厳密に解けません。表 2 に、読み取った (λ, ϕ) (上) とそれから換算された (r, ϕ) (下) を示します。そして、表 2 の下段から、等電位線を図 4 に描きました。

表 2: 読み取られた λ の値 (上) とそこから換算された $r (= \lambda r_0 [\text{\AA}])$ の値 (下)

読み取り入値							
$\Phi(\lambda, \phi) =$	3.5	3	2.5	2	1.5	1	0.5
$\phi=30$	(λ)なし	0.433	1.000	1.418	1.986	3.016	6.025
$\phi=40$	なし	5.000	1.046	1.445	2.000	3.020	6.025
$\phi=50$	なし	0.757	1.164	1.533	2.063	3.050	6.033
$\phi=60$	なし	1.089	1.337	1.638	2.114	3.082	6.044
$\phi=70$	0.508, 1.174	1.313	1.485	1.740	2.178	3.100	6.050
$\phi=80$	0.544, 1.348	1.444	1.584	1.813	2.225	3.131	6.056
$\phi=90$	0.496, 1.395	1.485	1.618	1.835	2.244	3.151	6.063

(誤差±0.005)

換算 r 値							
$\Phi(r, \phi) =$	3.5	3	2.5	2	1.5	1	0.5
$\phi=30$	(r)なし	2.165	5.000	7.091	9.930	15.080	30.125
$\phi=40$	なし	25.000	5.230	7.225	10.000	15.100	30.125
$\phi=50$	なし	3.785	5.820	7.665	10.315	15.250	30.165
$\phi=60$	なし	5.445	6.685	8.190	10.570	15.410	30.220
$\phi=70$	2.540, 5.870	6.565	7.425	8.700	10.890	15.500	30.250
$\phi=80$	2.720, 6.740	7.220	7.920	9.065	11.125	15.655	30.280
$\phi=90$	2.480, 6.975	7.425	8.090	9.175	11.220	15.755	30.315

(誤差±0.025)

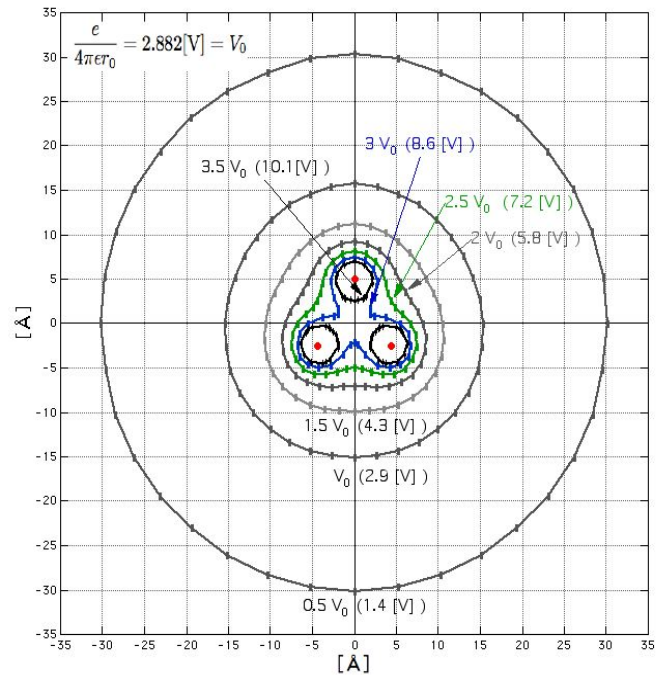


図 4: 2次元平面内での一辺が5Åの正三角形の頂点に配置された3個の電荷 +e の等電位線

3 ガウスの法則と渦なしの法則

3.1 法則の概要と表式

「静電場では2つの基本法則、ガウスの法則と渦なしの法則が存在する。」とされています。しかし、この発想はやめましょう。**静電場で最も基本的な法則はクーロンの法則です。**

なぜならば、クーロンの法則からガウスの法則と渦なしの法則が導きだせるからです。つまり、(クーロンの法則) → (ガウスの法則と渦なしの法則) という序列 (右図参照) が厳然とあります。この3者は対等ではなく、クーロンの法則が親で、その下にいるガウスの法則と渦なしの法則が兄弟なのです。既存の参考書や大学の授業では、この論理関係をしっかりと説明しないことが多いです。

ガウスの法則は、一般に、「**電荷**が保存する。」という性質を表してると言われます。言葉は悪いですが、陳腐な説明です。電荷保存と言いますが、普通は電荷はパッと消えたりしないのですから、当たり前なんです。ガウスの法則の神髄は、「**ガウスの法則は、電場の発生源は電荷であり、電荷分布によって電場が決定される。**」ということです。

他方、渦なしの法則は、一般に「**保存力場**である。」という性質を示していると言われています。これは、ガウスの法則よりは、まだマシですが(?)、渦なしの法則が本当に語りたい物理は、ズバリ「静電場は、電荷に**自転運動を引き起こさず**、電荷に**周期運動や並進運動のみを引き起こし**、**螺旋運動を引き起こさない**力場である」ということです。この性質を持つ場が保存力場です^[5]。

ここでこの2つの法則を微分方程式として下表にまとめましょう。記号や定数が少しややこしく、初心者には多少は手強い印象を与えますが、表現方法がこのテキストの定義的な役割を兼ねているため、列挙しました。以下の記号 $\nabla \cdot (\text{div})$ や $\nabla \times (\text{rot})$ や $\nabla (\text{grad})$ の物理的な意味は、後述の § 4.1 で詳しく説明しますので、ここでは軽く読み流しても大丈夫です。

	ガウスの法則	渦 (回転) なしの法則
積分形	$\int \int_S \{\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}\} dS = \frac{1}{\epsilon_0} \int \int \int_V \rho(\mathbf{r}) dV$ (A)	$\oint_C \{\mathbf{E} \cdot \mathbf{t}\} ds = 0$ (B)
微分形	$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\epsilon} \rho(\mathbf{r})$ (C)	$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0$ (D)

(ϵ は観測空間の誘電率、 $\rho(\mathbf{r})$ は電荷密度)

式(A)の S はある**閉曲面**をあらわし、 \mathbf{n} はその**閉曲面**上のある点の**法線**方向の単位ベクトル、 V は**閉曲面** S 内部の**3次元空間**を表します。式(B)の C はある**閉曲線**、 $\mathbf{t}(\mathbf{r})$ はその**閉曲線**上のある点の**接線**方向の単位ベクトルを表します。

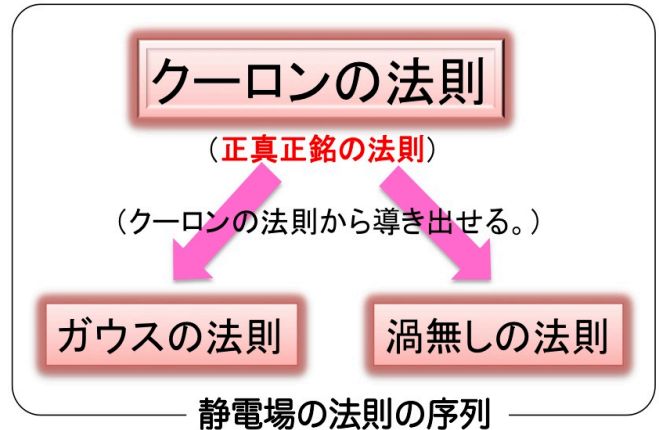
式(C)、(D)に使われる ∇ という記号は**ナブラ**と呼ばれ、ハミルトンが使用した記号です。そのため、ごくまれにハミルトン記号と書かれる事がありますが、基本的には対応する日本語の名前はありませぬ。

その定義式は

$$\text{Def.) } \nabla = \mathbf{x} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{y} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{z} \frac{\partial}{\partial z}, \tag{28}$$

で、演算子である事に注意して下さい。

^[5]保存力場の特徴を § 3.3 電場と言う力場で説明します。



式 (C) の戻りましょう。∇ とあるベクトル量 (**A**) の内積 ∇ · **A** を **A** の divergence もしくは発散と呼び、div **A** と書く事もあります。

$$\text{Def.) } \nabla \cdot \mathbf{A} = \text{div} \mathbf{A} = \frac{\partial \phi(\mathbf{r})}{\partial x} + \frac{\partial \phi(\mathbf{r})}{\partial y} + \frac{\partial \phi(\mathbf{r})}{\partial z}. \quad (29)$$

∇ · **A** で計算される量はスカラー量です。

ちなみに、∇ をスカラー量に作用させて得られる ∇φ(**r**) はベクトル量になり、φ(**r**) の gradient もしくは勾配と呼ばれ、grad φ(**r**) と表記される事もあります。

$$\text{Def.) } \nabla \phi(\mathbf{r}) = \text{grad } \phi(\mathbf{r}) = \left(\frac{\partial \phi(\mathbf{r})}{\partial x}, \frac{\partial \phi(\mathbf{r})}{\partial y}, \frac{\partial \phi(\mathbf{r})}{\partial z} \right). \quad (30)$$

式 (D) の ∇ × **E**(**r**) は、rot**E** や curl**E**(**r**) といった記述の仕方があり、一般的な日本語の呼び名は **E**(**r**) の回転 (rotation) と呼ばれ、定義式は、式 (44) もしくは § 4.1.3 回転; rot に記します。回転の量はベクトル量です。

3.2 ガウスの法則

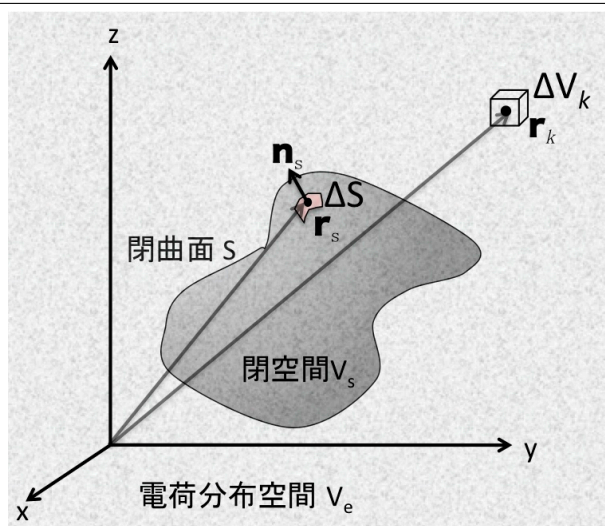
3.2.1 ガウスの法則の導出

演算子 ∇ · (div) の演算子量はスカラーで、被演算子量はベクトルです。この演算子は、そのベクトルが発生する位置で発生するベクトル量の密度 (スカラー量) を計算する演算子です (数学的には § 4.1.1 で追っていきます)。言い換えると、ベクトルの湧き出し密度を算出する演算子で、湧き出し後の流れの方向は被演算子のベクトルに示されます。

よって、div**E** を計算し、div**E** ≠ 0 になる場所が電場ベクトル **E** の発生場所です。これによって、電場の発生源が数学的に明らかになります。クーロンの法則で与えられる電場ベクトル; 式 (17)、式 (19) に、発散 div を取っても 0 になります (例題 4 参照)。つまり、これらの式が成り立つ場所では電荷の発生源が存在しないという事が導けます。一方、ガウスの法則の微分形の式 (C) は、電場の発生源は電荷であることを示しています^[6]。

一足飛びにガウスの法則の微分形の式 (C) にたどり着けないので、ある広がりを持つ空間から電場ベクトルが湧き出す量 (div**E**) を計算してみましょう。まず、以下の設定をします。

1. 任意の閉曲面 S があり、それに囲まれた空間を V_s とします。
2. 閉曲面 S 上の点を \mathbf{r}_s 、その位置での S 上の微小面と単位法線ベクトル (S の外向きを正とする。) を、それぞれ ΔS 、 \mathbf{n}_s とします。
3. 電荷の分布を表す空間を V_e とし、位置ベクトルを \mathbf{r}_e とします。
4. 空間; V_e を微小空間に分割します。 k 番目の微小空間の位置、電荷、体積を \mathbf{r}_k 、 $q(\mathbf{r}_k)$ 、 δV_k とし、電荷密度 $\rho(\mathbf{r}_k) = q(\mathbf{r}_k) / \delta V_k$ と定義します。



k 番目の微小空間の電荷がこの S 上の点 \mathbf{r}_s に作る電場ベクトル $\mathbf{E}_k(\mathbf{r}_s)$ は、

$$\mathbf{E}_k(\mathbf{r}_s) = \frac{q(\mathbf{r}_k)}{4\pi\epsilon} \frac{\mathbf{r}_s - \mathbf{r}_k}{|\mathbf{r}_s - \mathbf{r}_k|^3} = \frac{\rho(\mathbf{r}_k)\delta V_k}{4\pi\epsilon} \frac{\mathbf{r}_s - \mathbf{r}_k}{|\mathbf{r}_s - \mathbf{r}_k|^3}, \quad (31)$$

^[6]電荷の発生源は物理的には電荷に決まっているのですが (笑)

V_e の全ての電荷が \mathbf{r}_s に作る電場ベクトル $\mathbf{E}(\mathbf{r}_s)$ は、下式で与えられます。

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_{k=1}^n \frac{\rho(\mathbf{r}_k)\delta V_k}{4\pi\epsilon} \frac{\mathbf{r}_s - \mathbf{r}_k}{|\mathbf{r}_s - \mathbf{r}_k|^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{\rho(\mathbf{r}_k)\delta V_k}{4\pi\epsilon} \frac{\mathbf{r}_s - \mathbf{r}_k}{|\mathbf{r}_s - \mathbf{r}_k|^3} = \iiint_{V_e} \frac{\rho(\mathbf{r}_e)}{4\pi\epsilon} \frac{\mathbf{r}_s - \mathbf{r}_e}{|\mathbf{r}_s - \mathbf{r}_e|^3} dV_e. \quad (32)$$

いよいよ、ある空間から電場ベクトルが湧き出す量を計算します。そのためには、 $\text{div}\mathbf{E} dV$ に体積積分 \iiint_{V_e} を作用させれば求められます。ここにガウスの定理を下記のように使います（ガウスの定理の定義は § 4.2.1 を参照）。

$$\begin{aligned} \iiint_{V_s} \text{div}\mathbf{E} dV_s &= \iint_S \mathbf{E}(\mathbf{r}_s) \cdot \mathbf{n}_s dS \quad \leftarrow \text{ガウスの定理適用} & (33) \\ &= \iint_S \left(\iiint_{V_e} \frac{\rho(\mathbf{r}_e)}{4\pi\epsilon} \frac{\mathbf{r}_s - \mathbf{r}_e}{|\mathbf{r}_s - \mathbf{r}_e|^3} dV_e \right) \cdot \mathbf{n}_s dS \quad \leftarrow \text{式 (32) を代入} \\ &= \iiint_{V_e} \left(\frac{\rho(\mathbf{r}_e)}{4\pi\epsilon} \iint_S \frac{\mathbf{r}_s - \mathbf{r}_e}{|\mathbf{r}_s - \mathbf{r}_e|^3} \cdot \mathbf{n}_s dS \right) dV_e \\ &= \iiint_{V_e} \left(\frac{\rho(\mathbf{r}_e)}{4\pi\epsilon} \iint_S \frac{1}{|\mathbf{r}_s - \mathbf{r}_e|^2} \frac{\mathbf{r}_s - \mathbf{r}_e}{|\mathbf{r}_s - \mathbf{r}_e|} \cdot \mathbf{n}_s dS \right) dV_e = \iiint_{V_e} \left(\frac{\rho(\mathbf{r}_e)}{4\pi\epsilon} \int_S \frac{1}{|\mathbf{r}_s - \mathbf{r}_e|^2} \cos\alpha_s dS \right) dV_e \quad (34) \\ &= \iiint_{V_e} \left(\frac{\rho(\mathbf{r}_e)}{4\pi\epsilon} \int_{\Omega} \frac{1}{|\mathbf{r}_s - \mathbf{r}_e|^2} \cos\alpha_s \frac{|\mathbf{r}_s - \mathbf{r}_e|^2}{|\cos\alpha_s|} d\Omega \right) dV_e \quad \leftarrow \text{立体角; 式 (37) を適用} \\ &= \iiint_{V_e} \left(\frac{\rho(\mathbf{r}_e)}{4\pi\epsilon} \int_{\Omega_+} d\Omega \right) dV_e + \iiint_{V_e} \left(\frac{\rho(\mathbf{r}_e)}{4\pi\epsilon} \int_{\Omega_-} -d\Omega \right) dV_e, \end{aligned}$$

ただし、 Ω_+ は $\cos\alpha_s > 0$ の領域、 Ω_- は $\cos\alpha_s < 0$ の領域を表します。

閉曲面 S 内にある \mathbf{r}_k ($\mathbf{r}_{k \text{ in}}$ と表記) は、 Ω_+ のみが存在し、全空間 0 から 4π の積分変数で計算され、 Ω_- は存在しません。この場合、積分空間は V_e から V_S になります。

他方、閉曲面 S 外にある \mathbf{r}_k ($\mathbf{r}_{k \text{ out}}$ と表記) は、 Ω_+ が $0 < \Omega_+ < \Omega_t$ ならば、 Ω_- が $0 < \Omega_- < \Omega_t$ です（図参照）。この時、積分空間は V_S 以外の V_e ($V_{e \text{ out}}$) になります。よって、計算の続きは、

$$\begin{aligned} \iiint_{V_S} \text{div}\mathbf{E} dV_s &= \iiint_{V_S} \left(\frac{\rho(\mathbf{r}_{e \text{ in}})}{4\pi\epsilon} \int_{\Omega_+} d\Omega \right) dV_S + \iiint_{V_{e \text{ out}}} \left(\frac{\rho(\mathbf{r}_{e \text{ out}})}{4\pi\epsilon} \int_{\Omega_+} d\Omega \right) dV_{e \text{ out}} + \iiint_{V_{e \text{ out}}} \left(\frac{\rho(\mathbf{r}_{e \text{ out}})}{4\pi\epsilon} \int_{\Omega_-} -d\Omega \right) dV_{e \text{ out}} \\ &= \iiint_{V_S} \left(\frac{\rho(\mathbf{r}_{e \text{ in}})}{4\pi\epsilon} \int_0^{4\pi} d\Omega \right) dV_S + \iiint_{V_{e \text{ out}}} \left(\frac{\rho(\mathbf{r}_{e \text{ out}})}{4\pi\epsilon} \int_0^{\Omega_t} d\Omega \right) dV_{e \text{ out}} + \iiint_{V_{e \text{ out}}} \left(\frac{\rho(\mathbf{r}_{e \text{ out}})}{4\pi\epsilon} \int_0^{\Omega_t} -d\Omega \right) dV_{e \text{ out}} \\ &= \iiint_{V_S} \left\{ \frac{\rho(\mathbf{r}_{e \text{ in}})}{4\pi\epsilon} (4\pi - 0) d\Omega \right\} dV_S + \iiint_{V_{e \text{ out}}} \left(\frac{\rho(\mathbf{r}_{e \text{ out}})}{4\pi\epsilon} \int_0^{\Omega_t} (1 - 1) d\Omega \right) dV_{e \text{ out}} \\ &= \iiint_{V_S} \frac{\rho(\mathbf{r}_{e \text{ in}})}{\epsilon} dV_e = \frac{1}{\epsilon} \iiint_{V_S} \rho(\mathbf{r}) dV_s. \end{aligned} \quad (35)$$

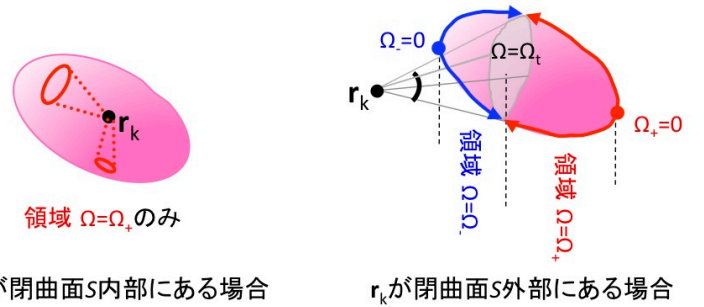
以上より、 $\iiint_{V_S} \text{div}\mathbf{E} dV_s = \frac{1}{\epsilon} \iiint_{V_S} \rho(\mathbf{r}) dV$ という計算結果が得られました。これは、閉曲面 S 内から発生する電場ベクトルの量は、閉曲面 S 内の電荷の総和に比例し、その比例定数はその空間の誘電率 ϵ の逆数であると言う事です。閉曲面 S を点電荷の場所に無限小に狭めて行った時、 $\text{div}\mathbf{E} = \frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon}$ が得られ、これは、ガウスの法則の微分形に他なりません。

出発式、ガウスの定理を適用した式 (33) と到達式 (35) より、

積分形ガウスの法則

$$\iiint_{V_S} \text{div}\mathbf{E} dV_s = \iint_S \mathbf{E}(\mathbf{r}_s) \cdot \mathbf{n}_s dS = \iiint_{V_S} \frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon} dV, \quad (36)$$

が得られます。



立体角

立体角 α とは、閉曲面上の積分で活躍する変数です。

もし、閉曲面が解析的で、方程式が $f(x, y, z) = a$ と具体的に与えられていたら、曲面の法線を求め、面積素片を極座標表示 $r^2 \sin \theta \Delta \theta \Delta \phi$ として積分変数を変換して計算する手段が定石です。しかし、計算が煩雑で近似値になる可能性もあります。これは力技で何とか計算結果を出したいときの手段です。

しかし、立体角への変数変換という別の手段もあります。被積分関数が式 (34) 内の $\frac{\mathbf{r}_s - \mathbf{r}_k}{|\mathbf{r}_s - \mathbf{r}_k|^3} \cdot \mathbf{n}_s$ のような、実質的に $1/r^2$ の関数である場合、極座標面積素片表示ではお手上げであるフリーハンドで書かれた閉曲面でも、 Ω の一重積分によって、積分値が計算されます^b。ここで、ベクトル場 \mathbf{A} とすると、内積 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{n}$ の S の閉曲面積分量は、その S 全体からのベクトル場 \mathbf{A} の流入（負値）・流出（正值）量の合計となります。

一般的な場合について、 dS から $d\Omega$ への変換を記しましょう。

閉曲面 S 上の任意の点の位置と法線ベクトルを、それぞれ \mathbf{r}_s と \mathbf{n}_s とし、そのなす角を α_s とします。すると、 $\frac{\mathbf{r}_s}{r_s} \cdot \mathbf{n}_s = \cos \alpha_s$ 、になります。他方、角 α_s は \mathbf{r}_s によって位置付けられる微少面 ΔS と \mathbf{r}_s に垂直な面と $\Delta S'$ のなす角度になります（左図参照）。したがって、両者の面積の関係は、 $\Delta S' = \Delta S |\cos \alpha_s|$ となります。この原点に対する ΔS の立体角 $\Delta \Omega$ は、 $\Delta \Omega = \frac{\Delta S'}{r_s^2}$ と定義されます。したがって、 $\Delta \Omega = \frac{\Delta S'}{r_s^2} = \frac{\Delta S |\cos \alpha_s|}{r_s^2}$ 、ゆえに、

$$\Delta S = \frac{r_s^2}{|\cos \alpha_s|} \Delta \Omega, \quad (37)$$

となります。

^awikipedia より

立体角（りったいかく、英語: solid angle）とは、二次元における角（平面角）の概念を三次元に拡張したものである。平面上における角とは、平面上の同一の点（角の頂点）から出る二つの半直線によって区切られた部分のことをいい、この2半直線の開き具合を角度という。角度は、角の頂点を中心とする半径1の円から、2半直線が切り取った円弧の長さで表すことができる。これに対し、空間上における立体角とは、空間上の同一の点（角の頂点）から出る半直線が動いてつくる錐面によって区切られた部分のことをいい、この錐面の開き具合を角度という。角度は、角の頂点を中心とする半径1の球から錐面が切り取った面積の大きさを表すことができる。立体角の単位にはステラジアンが使われる。また、天文学で天球上における面積を表すのに用いられる平方度も立体角の単位の一つである。全立体角は 4π [sr (ステラジアン)] である。

^b他にも、閉曲面の微少面積部ベクトル（閉曲面上のある面積素片（ ΔS ）の法線方向に、長さがその面積に等しい外向きを正方向にするベクトル）の総和は0になるという定理は立体角を使えば簡単に証明されます。

これまでの $\text{div} \mathbf{E}$ の計算過程では、式 (31) において電場ベクトル \mathbf{E} を求めるためにクーロンの法則を用いていますが、それ以外は、数学的計算のみでガウスの法則 (36) が得られています。

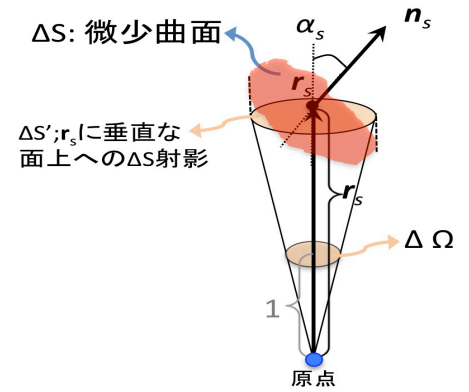
大切なのでわざわざ書きますが、**クーロンの法則が前提で、数学のガウスの定理を適用して、ガウスの法則が得られるのです。**

通常、第2式と第3式だけを取ってガウスの法則の積分形と命名されていますが、この3式表示であれば、式 (36) の第1式と第3式から、**電場ベクトルの湧き出し源は電荷**であるということがわかります。さらに、第2式と第3式から、**電場は電荷分布から決定される**事が明らかになるのです。**電荷湧出し則**は、ガウスの法則の一部を表しているにせよ、言葉足らずです。しかし、**電荷保存則**という呼び名は、全く的外れで悪質です（§5.2 参照）。

3.2.2 電位の微分方程式

クーロンの法則から静電場では、電荷のない場所での電場ベクトル $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ と電位 $\phi(\mathbf{r})$ の関係は式 (13) より、

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla \phi(\mathbf{r}), \quad (38)$$



です。式 (38) を微分形ガウスの法則式 (C) に代入すれば、

$$\nabla \cdot \nabla \phi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho(\mathbf{r}), \quad (39)$$

を得ます。 $\nabla \cdot \nabla$ は Δ と書き換えます。 Δ は **ラプラシアン** と呼ばれ、

$$\text{Def.) } \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad (40)$$

となります。 Δ に作用される物理量も得られる物理量もどちらも **スカラー** 量です。

Δ を使って式 (39) を書き換えましょう。

$$\Delta \phi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho(\mathbf{r}), \quad (41)$$

この微分方程式は、ポアソンの方程式と命名されています。この方程式の中に出てくるラプラシアン Δ の極座標表示への変換は、物理に役立つ数学がたくさん含まれているので、物理数学の授業の中心課題の1つに据えても良いと感じています (“静電場演習”、問題2参照)。

例題4

電荷のない点でのポアソンの方程式は、式 (41) の右辺が0になるため、微分方程式は

$$\Delta \phi(\mathbf{r}) = 0, \quad (42)$$

となり、ラプラスの方程式と名前が付けられています。式 (24) がラプラスの方程式を満たす事を計算して示してください。

(解)

式 (41) に式 (24) を代入すると、

$$\Delta \phi(\mathbf{r}) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \left(\frac{q}{4\pi\epsilon} \frac{1}{r} + \text{const} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{1}{r} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \frac{1}{r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \frac{1}{r} \right)$$

ここで、 $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{x}{r}$ である事を頭に置いて、

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{1}{r} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{x}{r^3} \right) = -\frac{r^3 - x \frac{\partial r^3}{\partial x}}{x^6} = -\frac{1}{r^3} + \frac{x}{r^6} 3r^2 \frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3x^2}{r^5},$$

同様に、

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} \frac{1}{r} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3y^2}{r^5},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \frac{1}{r} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3z^2}{r^5}.$$

\therefore

$$\begin{aligned} \Delta \phi(\mathbf{r}) &= \frac{q}{4\pi\epsilon} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{1}{r} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \frac{1}{r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \frac{1}{r} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon} \left\{ \left(-\frac{1}{r^3} + \frac{3x^2}{r^5} \right) + \left(-\frac{1}{r^3} + \frac{3y^2}{r^5} \right) + \left(-\frac{1}{r^3} + \frac{3z^2}{r^5} \right) \right\} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon} \left\{ -\frac{3}{r^3} + \frac{3}{r^5} (x^2 + y^2 + z^2) \right\} = \frac{q}{4\pi\epsilon} \left\{ -\frac{3}{r^3} + \frac{3}{r^5} r^2 \right\} = 0 \end{aligned}$$

(例題4 終わり)

電荷は特異点 (1)

クーロンの定義 (14) からは、電荷がある点での電場ベクトル (17) や電位 (24) は、無限大か無限小となり定義できません。つまり、電荷が無い場所での電荷密度分布 $\rho(\mathbf{r})$ に対して、式 (17) や式 (24) や式 (38) が有効になるだけなのです。また、当然、微分形のガウスの法則から出発して得られたポアソンの方程式；式 (41) も同様に電荷のある場所で議論ができません。

ようするに、**電荷のある場所は特異点**なのです。ですから、電荷のある場所には、微分形で表されたガウスの法則は適用できないのです。

しかし、クーロンの法則を土台で、積分領域内に特異点の電荷があっても、積分形表示であれば、ガウスの法則は成立します。厳密に特異点の種類を数学的に考察するのも 1 つの手段です。しかし、物理的には、電荷は電場ベクトルの湧き出し、吸込み口という性質の特異点であるために、領域から湧き出す電場ベクトル量を計算するガウスの法則の積分形が成立するのです。微分形のガウスの法則では、**E という流れの起源が電荷である**というメッセージが、積分形のガウスの法則では **電場ベクトル発生源の電荷分布が電場を決定する**というメッセージが強調されており、書き方によってクローズアップされる事象が異なります。

ラプラスって有名ですが！ — 意外と楽しみなサイドメニュー (2) —

ピエール＝シモン・ラプラスにちなんで付けられた微分方程式が式 (42) です。彼はフランスの数学者で 1749 年 3 月 23 日から 1827 年 3 月 5 日の 77 年の生涯を送りました。全 5 巻の名著「天体力学概論」という名著を書き、その中で剛体や流体の運動、地球の形や潮汐の理論までも論じています。数学的にはこれらの問題はさまざまな微分方程式を解くことに帰着されます。ラプラス変換、ラプラス方程式なども含め、数学上の偉大な業績を多々残しました。さらに m メートルの定義の基礎も作っており、長さの尺度として地球の北極点から赤道までの子午線弧長を精密に測量し、その 1000 万分の 1 をもって基準とすることを提唱しました。まさに現代の技術の礎を築いています。

一方でラプラスの悪魔と言われる、“これから起きるすべての現象は、これまでに起きたことに起因する。”として“ある特定の時間の宇宙のすべての粒子の運動状態が分かれば、これから起きるすべての現象はあらかじめ計算できる。”という俗称ラプラスの悪魔という考えを提唱しました。しかし、彼の死後に確立した量子力学に完全に否定されました。

ラプラスは政治家としても活動し、1799 年、ナポレオン・ボナパルトの統領政府で一カ月余の短期間ながら内務大臣に登用され、王政復古後はルイ 18 世の下で貴族院議員となりました。

以上の事をラプラス一人でやったとしたら、まるで神業だということです。そんな神業を持っている人がラプラスの悪魔の発想？が起ころうでしょうか？

また、仕事量からして、上記に列挙した仕事はチームとして行ったもので、ラプラス 1 人でやった事ではないと考えるべきでしょう。そして、問題はその目的です。チームラプラスがやった仕事とは、ガリレオから始まり、ニュートンで飛躍的に発展した本格的な科学の研究の蓄積をストレートにわかりやすく伝えるためではなく、湾曲させてわかりづらいものにするのが目的だったと考えるべきでしょう。何人もの研究者が、そのようなネジレに挑んだ事でしょう。ファラデー (S 4.3 電場の誕生) やアインシュタインはそんな偉大な研究者達の一部だと私は感じています。

3.3 渦 (回転) なしの法則

力場中の仕事

任意の力場 \mathbf{A} に力 $c\mathbf{A}$ (c は定数) で感応する物体を、 $\delta\vec{\ell}$ だけ変位させた時、この力場とこの物体の間での仕事のやり取りは、 $c\mathbf{A}\cdot\delta\vec{\ell}$ となります。

そこで、この物体をこの力場中のある微小閉曲線に沿って一周させます。この物体と場 \mathbf{A} との間でなされる仕事 ΔW は、

$$\Delta W = c \nabla \times \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \Delta S, \quad (\text{E})$$

と与えられます。ただし、この閉曲線で囲まれた部分は1つの平面上にあると近似できるくらい十分微小で、専ら面積を ΔS 、その平面的法線（単位）ベクトルを \mathbf{n} と表しています（詳しい導出は例題5参照）。

例題5

式 (E) を導いてください。(注) この問題と解答は下記を参考にさせていただきました。

<http://hooktail.sub.jp/vectoranalysis/VectorRotation/>

(解)

微小閉曲面 (ΔS) を長方形に取り、この長方形が乗る平面を xy 平面とします。よって、 z 軸はこの平面に垂直です。この長方形の中心を (x, y) としましょう。

各頂点を

$$A \equiv \left(x + \frac{\Delta x}{2}, y + \frac{\Delta y}{2}, 0 \right),$$

$$B \equiv \left(x - \frac{\Delta x}{2}, y + \frac{\Delta y}{2}, 0 \right),$$

$$C \equiv \left(x - \frac{\Delta x}{2}, y - \frac{\Delta y}{2}, 0 \right),$$

$$D \equiv \left(x + \frac{\Delta x}{2}, y - \frac{\Delta y}{2}, 0 \right),$$

と定義します。辺 AB, 辺 BC, 辺 CD, 辺 DA の中点を ♣, ◇, ♡, ♠ と表した場合、

$$\mathbf{A}_{\clubsuit} = \mathbf{A} \left(x, y + \frac{\Delta y}{2}, 0 \right),$$

$$\mathbf{A}_{\diamond} = \mathbf{A} \left(x - \frac{\Delta x}{2}, y, 0 \right),$$

$$\mathbf{A}_{\heartsuit} = \mathbf{A} \left(x, y - \frac{\Delta y}{2}, 0 \right),$$

$$\mathbf{A}_{\spadesuit} = \mathbf{A} \left(x + \frac{\Delta x}{2}, y, 0 \right),$$

と表示できます。右図を参照してください。

物体の移動順路を $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow A$ としましょう。 $A \rightarrow B$ までの変位による仕事 $W_{A \rightarrow B}$ は近似的に $c \mathbf{A}_{\clubsuit} \cdot \overrightarrow{\mathbf{AB}}$ となります。もう少し具体的に計算してみると、

$$W_{A \rightarrow B} \approx c \mathbf{A}_{\clubsuit} \cdot \overrightarrow{\mathbf{AB}} = c \mathbf{A} \left(x, y + \frac{\Delta y}{2}, 0 \right) \cdot (-\Delta x, 0, 0) = -c A_x \left(x, y + \frac{\Delta y}{2}, 0 \right) \Delta x.$$

同様に、 $W_{B \rightarrow C}$, $W_{C \rightarrow D}$, $W_{D \rightarrow A}$ について計算して行くと、

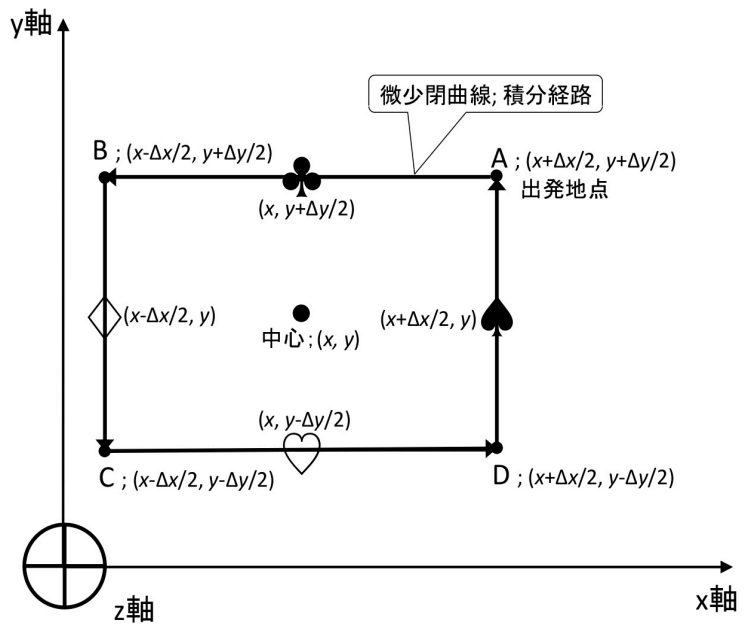
$$W_{B \rightarrow C} \approx c \mathbf{A}_{\diamond} \cdot \overrightarrow{\mathbf{BC}} = c \mathbf{A} \left(x - \frac{\Delta x}{2}, y, 0 \right) \cdot (0, -\Delta y, 0) = -c A_y \left(x - \frac{\Delta x}{2}, y, 0 \right) \Delta y,$$

$$W_{C \rightarrow D} \approx c \mathbf{A}_{\heartsuit} \cdot \overrightarrow{\mathbf{CD}} = c \mathbf{A} \left(x, y - \frac{\Delta y}{2}, 0 \right) \cdot (\Delta x, 0, 0) = c A_x \left(x, y - \frac{\Delta y}{2}, 0 \right) \Delta x,$$

$$W_{D \rightarrow A} \approx c \mathbf{A}_{\spadesuit} \cdot \overrightarrow{\mathbf{DA}} = c \mathbf{A} \left(x + \frac{\Delta x}{2}, y, 0 \right) \cdot (0, \Delta y, 0) = c A_y \left(x + \frac{\Delta x}{2}, y, 0 \right) \Delta y.$$

物体が場 \mathbf{A} の中を $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow A$ と一周したときの仕事を ΔW とした場合、

$$\begin{aligned} \Delta W &= W_{A \rightarrow B} + W_{B \rightarrow C} + W_{C \rightarrow D} + W_{D \rightarrow A} \\ &\approx c \left[\underbrace{-\Delta x \left\{ A_x \left(x, y + \frac{\Delta y}{2}, 0 \right) - A_x \left(x, y - \frac{\Delta y}{2}, 0 \right) \right\}}_{\text{}} + \underbrace{\Delta y \left\{ A_y \left(x + \frac{\Delta x}{2}, y, 0 \right) - A_y \left(x - \frac{\Delta x}{2}, y, 0 \right) \right\}}_{\text{}} \right] \end{aligned}$$



ここで、

$$\begin{aligned} \text{波線部} &\approx \Delta x \frac{\partial A_x}{\partial y} \Delta y = \frac{\partial A_x}{\partial y} \Delta x \Delta y, \\ \text{下線部} &\approx \Delta y \frac{\partial A_y}{\partial x} \Delta x = \frac{\partial A_y}{\partial x} \Delta x \Delta y, \end{aligned}$$

ゆえに、

$$\Delta W \approx c \left\{ -\frac{\partial A_x}{\partial y} + \frac{\partial A_y}{\partial x} \right\} \Delta x \Delta y. \quad (43)$$

ここで、

$$\text{Def.) } \nabla \times \mathbf{A} = \text{rot} \mathbf{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \quad (44)$$

となるので、

$$-\frac{\partial A_x}{\partial y} + \frac{\partial A_y}{\partial x} = |\nabla \times \mathbf{A}|_{z \text{ 成分}} = \nabla \times \mathbf{A} \cdot (0, 0, 1), \quad (45)$$

と記述できます。

ところで、 $(0, 0, 1)$ はこの長方形の法線ベクトルですから \mathbf{n} と表記します。式 (43) に式 (45) と \mathbf{n} を代入すると、

$$\Delta W \approx c \nabla \times \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \Delta S,$$

となります。ここで、 $\Delta S = \Delta x \Delta y$ としました。

$\Delta x, \Delta y, \Rightarrow 0$ としたら” \approx ”から” $=$ ”に変更できるので、

$$\Delta W = c \nabla \times \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \Delta S, \quad (46)$$

となり、式 (E) は証明されました。

(例題5 終わり)

電場という力場

2つの電荷間に働くクーロン力は向きが電荷を結ぶ直線に沿い、強さは電荷間の距離の自乗に反比例するとしています^[7]。このような性質の力は物理学的に**中心力**と名付けられて、クーロン力は**重力と全く同じメカニズム**です。また、等速円運動を起こす力は**向心力**でしたが、電場や重力場の中心力が物体に作用して、等速円運動を起こします。

例題6

電場ベクトル \mathbf{E} は、クーロンの法則によって、式 (38) を満たす事が導かれますが、これによって、恒等的に $\nabla \times \mathbf{E} \equiv 0$ を成立させている事を示してください。

(解)

$\nabla \times \mathbf{A} = \text{rot} \mathbf{A}$ とも表記されます (両表記で解答を記しましょう。)

式 (38) の両辺に $\nabla \times$ (もしくは、**rot**) を作用させると、

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla \times \nabla \phi(\mathbf{r}) = \mathbf{grad} \text{ rot} \phi(\mathbf{r}).$$

$\nabla \times \nabla = \mathbf{grad} \text{ rot}$ という演算子は、作用される物理量に関わらず恒等的に0になる数学的な性質を持っています。したがって、上式の右辺は恒等的に0になります。つまり、

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) \equiv 0. \quad (47)$$

したがって、式 (38) により定義される電場ベクトルで記述される静電場は恒等的に渦なしの法則を満たしている事が確認できました。

^[7] §2.1 でクーロンの法則を参照して下さい。

任意の静電場中で、電荷 q_1 が任意の閉曲線に沿って一周して元の位置に戻るとします。このとき、電荷 q_2 と電場間での仕事のやり取り量 ΔW は、式 (46) によって与えられますが、そこに、電場ベクトル \mathbf{E} ; 式 (47) を代入したら、 $\Delta W = 0$ となります。ですから、静電場のベクトル場中を、電荷 q_1 が任意の閉曲線に沿って一周して元の位置に戻った場合は、電場と電荷 q_1 との間での仕事のやり取りは 0 になるのです。

さらに、議論を展開して行きます。この閉曲線の出発・到着点を P とし、途中の位置を Q とします。P → Q までの仕事を ΔW_{PQ} とし、Q → P までの仕事を ΔW_{QP} とすれば、 $\Delta W = \Delta W_{PQ} + \Delta W_{QP} = 0$ という関係式が得られます。この閉曲線は任意ですから、後半の Q → P の経路を固定して、前半の P → Q までの経路を変えても、 $\Delta W_{PQ} = -\Delta W_{QP} = \text{一定}$ という関係が得られます。つまり、**電荷が静電場中を移動する際に、その電場と電荷との間でやり取りされる仕事 W が経路の選択には依存せず、初期位置 (P) と最終位置 (Q) の位置だけに依存することが導けます。**この性質を持つ場を**保存力場**と呼びます。中心力場は保存力場です。

まとめると、静電場の渦なしの法則は、電場内を電荷が閉曲線に沿って一周した時に、電場と電荷の仕事のやり取りの収支が 0 になり、その結果として、その仕事 W が経路の選択には依存せず、初めの位置 P と終わりの位置 Q だけに依存する (保存力場である) という法則です。これが一般的に言われる、**渦なしの法則は保存力場の法則**の物理的特徴です^[8]。

しかし、ここではもう少し深く考えていきましょう。

固定電荷 q_2 の作る静電場の中に、電荷 q_1 を初速度 \mathbf{v} で飛ばし、初めの位置で (運動エネルギー) + (静電エネルギー) < 0 の場合を考えます。固定電荷 q_2 が等方的な点電荷ならば、最終的に q_1 が q_2 中心とした 1 つの平面上での等速円運動になります。しかし、任意の静電場で言える事は、電荷は**一周したら状態が元に戻る**ことが保証されているのです。このため、つねに同じ事が繰り返されるのですから、 q_2 は静電場中では螺旋運動はせず、周期運動をすることになるのです。一方、初めの位置で (運動エネルギー) + (静電エネルギー) > 0 の場合は、最終的には電荷 q_1 は電荷 q_2 から無限に遠ざかっていきます。

さらに、微分記号で成り立っている渦なしの法則式 ; 式 (47) の $\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) \equiv 0$ が意味する所は、「局所的に渦が作られない → 電荷に自転が起こらない」ということを意味するのです。つまり、静電場は荷電粒子に自転的運動も生じさせる事ができないということです。これを引き起こしてしまったら、エネルギーを使い、一周して元の状態には戻りません。詳しい議論は § 4.1.3 に記します。

したがって、**静電場は、電荷に自転運動を引き起こさず、電荷に周期運動や並進運動のみを引き起し、螺旋運動を引き起こさない力場である**という事が見えてきます。じつは、これが、**保存力場の物理的神髄**なのです。

4 電磁気学の背景

4.1 ベクトル解析

まず、電磁気学では大きな役割を演じる演算子 div , grad , rot 、電磁気学の屋台骨というべき存在です。これらはベクトル解析の演算子です。

ベクトル解析がどんなものか私なりの定義は、

空間に、位置 (x, y, z) に依存する“流れ”があります。この“流れ”を $\mathbf{E} = (E_x, E_y, E_z)$ とし、数学的に解析する手法をベクトル解析と呼び、この“流れ”が生じている空間を“ベクトル場”と言います。

となります。もちろん、二次元空間であれば、位置 (x, y) とすればいいだけです。

“流れ”というキーワードから、その名の通り、ベクトル解析は“流体力学”で活躍しています。流体力学での流れは“速度流”と言われるものです。もちろん、気象の解析にも重要な役割を担っているようです。電磁気学での流れは電場ベクトル \mathbf{E} です。

^[8]磁場 \mathbf{H} は、 $\text{rot}\mathbf{H} = \mu\mathbf{j}$ のため、単磁荷を一周させると状態が元には戻らないという事になります。しかし、単磁荷は存在せず、常に N と S が一緒に存在するので、一周すればお互いに相殺されて、元の状態へと戻ります。ご安心あれ。

電場ベクトルと電束 一意外と楽しい サイドメニュー (3) 一

歴史的には初めから電場ベクトルが導入されたのではなく、電束、電束密度が先に導入された様です。そして、クーロンの法則などを考察しました。電荷からは電束が出て、電束密度の流れが起こり電場が作られると考えて、電束の“流れ”を数学的に解析し、クーロンの法則の説明を成功させました。

電束を定量的に定義すると、1[C]の正電荷からは1本の電束が発生し、-1[C]の負電荷からは1本の電束が引き込まれるということになります。

流れを表すのに必要なものは、流れの速さと方向と流体の密度です。しかし、電束はスカラー量であって流れではありません。電束の発想の下で流れとして定義される量が電束密度と呼ばれる量です。これは**ベクトル量**で、電場ベクトルに対応する物理量です。電束密度というスカラー的なイメージになりますので、**電束密度流**と言うべきです。

電束の定量的な定義では、電荷の量により決まった量の電束が発生し、電荷が置かれた空間（真空、空気中、水中等々）に依存しないという事になり、空間に依存するものは、**電束密度流**であると解釈するのです。

他方、電場ベクトルを軸にした解釈で電場ベクトルを眺めたものが、ガウスの法則(C)です。同じ1[C]の電荷でも、回りの空間によって湧き出る電場ベクトルの量が異なるという事になります。私としては、電束という量を介在させず、電場ベクトルを、直接、定義するのですっきりとしていると感じます。そのためか、現在の電磁気学では電場ベクトルを軸とした解釈で構成されていて、電束、電束密度は存在感がありません。両方とも、なるほどなと思うところもあるのですが、修学初期段階で両者が混在してしまうと、静電場のイメージを複雑にしてしまうと思います。

物理学全般でも、用語の定義が日本語のイメージに合わない、重複する物理変数、そして統一されない単位などで習得が困難になっています。大半が、文章や表現が不親切でとてもわかりにくいのが、厄介の原因です。学習者の能力が低いのではなく、参考書の表現が不適切な場合が多いという事を心に留めて下さい。個々の点は正しい事が多いのですが、それらが、ねじれて繋がられています。それらを正常につなぎ合わせるには、かなりの労力を要するのですが、基本に立ち返り、ねじれた物理教科書の書き換えを進める時期だと思えます。

4.1.1 発散 (湧き出し) ; div

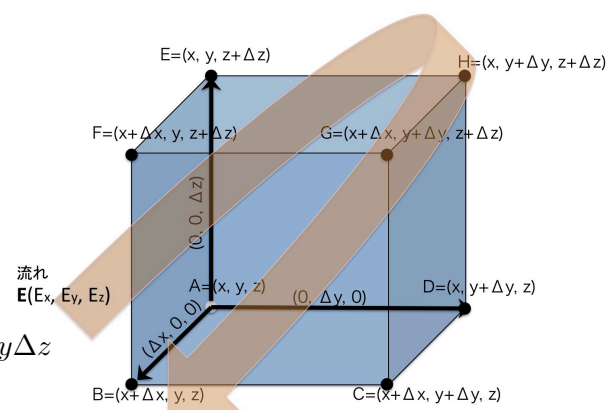
その定義は、式 (29) で与えました。なぜ、湧き出しと呼ばれるのでしょうか。図を見ながら考えていきましょう。位置に依存する $\mathbf{E} = (E_x, E_y, E_z)$ という流れがある場 (空間) を考えます^[9]。

正六面体 (直方体) の微小空間 ($\Delta V = ABCDEFGH$) への、 x 方向の流入出の総量 ΔE_x は、

$$\begin{aligned} \Delta E_x &= \square BCGF \times E_x(x + \Delta x, y, z) \\ &- \square ADHE \times E_x(x, y, z) = \{E_x(x + \Delta x, y, z) - E_x(x, y, z)\} \Delta y \Delta z \\ &= \left\{ \frac{\partial E_x}{\partial x} \times \Delta x \right\} \Delta y \Delta z = \frac{\partial E_x}{\partial x} \Delta V, \quad \text{ただし、} \Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z. \end{aligned}$$

同様に、 y, z 方向の流入出の総量 $\Delta E_{y,z}$ は

$$\Delta E_y = \frac{\partial E_y}{\partial y} \Delta V, \quad \Delta E_z = \frac{\partial E_z}{\partial z} \Delta V.$$



^[9]流れをきちんと定義しないと、そのベクトル量が表すものも定義されません。水流であれば、流れの速さと水の密度が大きさによって表され、方向はベクトルの向きで表されます。気流であれば空気圧と風速が大きさ、風向きがベクトル方向です。これらは流体の速度場といわれるものに分類されます。一方、電場 \mathbf{E} は速度場でもないし、力を直接表している訳ではないです。 \mathbf{E} の方向は力の働く方向ですが、大きさを解釈しようとすると、電荷1クーロンに作用される力の大きさです。

したがって、この微小体積 $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$ から流入出の総量 ΔE は、

$$\Delta E = \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) \Delta V = \text{div} \mathbf{E} \cdot \Delta V,$$

と計算されます。その量は**スカラー**量です。

ここまで来れば、もうお分かりですね！

$\text{div} \mathbf{E}$ とは、流れ \mathbf{E} の、ある微小空間 ΔV からの流入出の総流量です。 $\text{div} \mathbf{E}$ が 0 より大きければ、微小体積 ΔV に流れ \mathbf{E} の湧き出し量が、その吸い込み量より多いということで、 $\text{div} \mathbf{E}$ が 0 より小さければ、その逆です。

4.1.2 勾配； grad

その定義は、式 (30) で与えました。

山の標高を思い浮かべてください。標高がスカラー量 $\phi(x, y, z)$ にあたります。普通の山では、山道は人間が歩きやすい、もしくは、車が進みやすい方向に設計されています。進む距離を短くするために、斜度を大きくするという無謀な設計はされていません。進む方向により斜度が変わるので、人間や自動車が移動しやすい方向に道が設計されます。同様に、三次元関数 $\phi(x, y, z)$ の変化率も当然ながら方向に依存します。そして、 x 方向の変化率が $\frac{\partial \phi}{\partial x}$ です。電磁気学では、電位 $\phi(x, y, z)$ が標高でした。そして、 $\mathbf{E} = \text{grad} \phi$ は、 $\phi(x, y, z)$ の最大傾斜の方向と変化率です。ここで、電荷が登場してもらいましょう。正の電荷が、電場ベクトルによって表されるこの流れに乗れば $\phi(x, y, z)$ 坂を最大傾斜 \mathbf{E} に沿って、一挙に下って行きます。負の電荷はパワフルに $\phi(x, y, z)$ 坂を最大傾斜 \mathbf{E} に沿って登って行きます。ただ、前者を人間が山でやったら危険ですし、後者も人間には基本的に無理ですね。

4.1.3 回転； rot

回転の定義は、

$$\nabla \times \mathbf{E}(x, y, z) = \text{rot} \mathbf{E}(x, y, z) = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}, \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}, \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right),$$

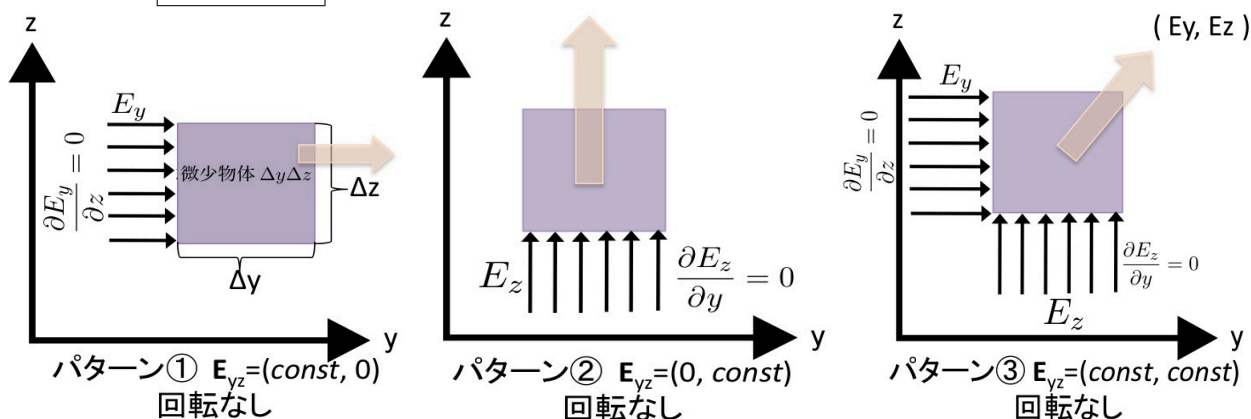
で、**ベクトル**量です。流体力学の分野では、 $\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r})$ は $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ は“渦度”と呼ばれ、 $\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r})$ の方向と大きさは、ベクトル場内の位置 \mathbf{r} において、この場と相互作用する物体に、この場が引き起す自転の回転軸と自転の強さを表しています。

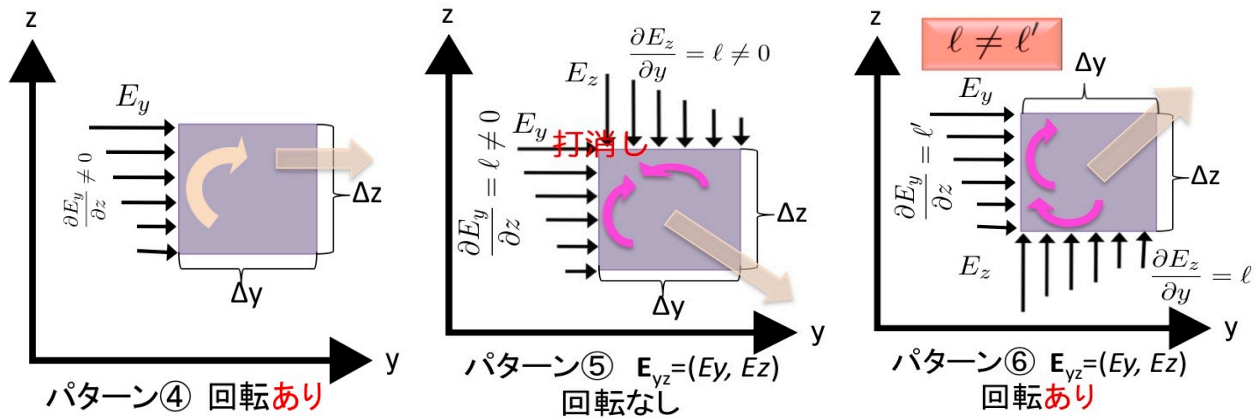
まず始めに、 yz 平面ベクトル場内の微小物体 $\Delta y \Delta z$ の運動を、下図に示した 6 つの流れパターンにそって考えましょう。図中で x 軸方向から見たベクトル場を $\mathbf{E}_{yz} = (E_y, E_z)$ と書きました。

パターン①では、 y 方向のみに一様な流れがあります。 $E_y = \text{一定}$, $E_z = 0$ で、流れは辺 Δz にぶつかりますが、流れが一様なので、この流れはこの微小物体 $\Delta y \Delta z$ に対して、自転的回転（以後、自転と表記）を起こす事はなく並進力を生じさせます。

一般に、流れが一様な場合、この流れにより物体には自転運動ではなく、並進運動だけが起こります。

したがって、パターン②でも、並進運動のみが起こります。





パターン④では、 $\frac{\partial E_y}{\partial z} \neq 0$ となるので、自転力も並進力も生じます。 $\Delta y \Delta z$ が微小物体であることを前提に、少し解析的に考察します。自転力は $\{E_y(y, z + \Delta z) - E_y(y, z)\}$ に比例し、その単位長さ当りの自転力は $\{E_y(y, z + \Delta z) - E_y(y, z)\} / \Delta z$ に比例することになります。 $\Delta z \rightarrow 0$ の時には、

$$\text{自転力} \propto \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\{E_y(y, z + \Delta z) - E_y(y, z)\}}{\Delta z} = \frac{\partial E_y}{\partial z}, \quad (48)$$

となります。

y, z の両方向に流れがある場合の代表例が、パターン③、⑤、⑥です。

パターン③では、 $\frac{\partial E_y}{\partial z} = 0, \frac{\partial E_z}{\partial y} = 0$ なので、自転は生じません。

パターン⑤は、 $\frac{\partial E_y}{\partial z} = \ell, \frac{\partial E_z}{\partial y} = \ell$ となっているので、 y と z 方向の2つの流れの作る自転力の大きさは等しく逆向きなので釣り合ってしまう自転が起きません。

パターン⑥は $\frac{\partial E_z}{\partial y} = \ell$ と $\frac{\partial E_y}{\partial z} = \ell'$ 、かつ、 $\ell \neq \ell'$ の場合ですので自転力が生じます。

以上から、

yz 面内で自転が起こるためには、

$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \neq 0$ (“回転の強さ”)であり、この流れの“回転の強さ”の絶対値が大きいほど自転力は大きくなります。これは、rotの定義式の x 成分です。 $\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = 0$ であれば、 yz 面内には自転が起こりません。

ここで、3次元の流れ $\mathbf{E}(x, y, z)$ に拡張した場合、上の yz 面内の考察は $\mathbf{E}(x, y, z)$ を x 軸方向から観察した振る舞いと考えられます。 y 軸方向から観察したこの流れの zx 面での自転の強さは、 $\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}$ となり、rotの定義式の y 成分です。同様に、 z 軸方向から観察したら、この流れの自転の強さは、 $\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}$ でrotの定義式の z 成分となります。

流れ \mathbf{A} が、中に置かれた物体に自転を起こす場合、 $\text{rot } \mathbf{A}$ は自転軸になります。 $\text{rot } \mathbf{A}$ に垂直な面で、物体の最大の自転回転が起きるのです。そして、 $|\text{rot } \mathbf{A}|$ は、この物体に起こす自転の強さをあらわす量なのです。

ある場所で、この場(流れ)が、相互作用する物体に引き起す移動方向は \mathbf{A} で表されますが、並進運動と自転運動の両方の情報が混ざっています。これに対して、演算子 $\text{rot } \mathbf{A}$ を計算すれば、流れ \mathbf{A} がこの物体に引き起す自転成分のみを回転軸と自転の強さとして取り出す事が出来るのです。これが、演算子 rot なのです。

電子軌道の量子数と電子スピン — 意外と楽しいサイドメニュー (4) —

§3.3 や §4.1.3 で、 $\text{rot } \mathbf{A} \neq 0$ は流れ \mathbf{A} が物体に自転を起こさせますが、 $\text{rot } \mathbf{A} = 0$ であつたら自転を起こす力にならず並進が起こるだけという事を重ねて説明しました。量子力学の分野になりますが、静電エネルギー支配下の軌道電子のシュレディンガーの方程式の結果が、 $\text{rot } \mathbf{A} = 0$ の渦なしの法則の結果を反映していますので、紹介します。軌道電子の原子核と他の軌道電子による静電エネルギー (U)、電子の運動エネルギー (K) とした場合、この電子の状態方程式 ϕ は、

$$(U + K)\phi = E\phi, \quad (49)$$

のシュレディンガーの方程式を満たします。これを地道に解く事によって、軌道電子の状態方程式が、 $\phi =$ 動径分布関数 (R_n) \times 球面調和関数 ($Y_{\ell,m}$) と導出され、軌道電子を決定する 3 変数、主量子数 n 、方位量子数 ℓ 、磁気量子数 m が得られるのです^{ab}。ちなみに、動径分布関数 (R_n) は原点からの距離 r の関数、球面調和関数 ($Y_{\ell,m}$) は偏角 (θ, φ) の関数です。 n, ℓ, m は、原子核を回る電子の並進移動を表しています。一方、電子が持つスピン角運動量は、このシュレディンガー方程式を解いても出て来ません。それもそのはずで、静電場は荷電粒子に自転・螺旋的な運動を引き起さない $\text{rot } \mathbf{A} = 0$ という性質を持っているからです。

電磁気学で活躍する $\text{rot } \mathbf{E} = 0$ は、静電場中を閉曲線 (平面長方形) に沿って電荷を一周移動させた時の仕事の収支が 0 になるという物理に帰着されてしまい、自転運動までは思いが至らないのです。しかし、この公式 (渦なしの法則) $\text{rot } \mathbf{E} = 0$ には、「静電場の場合は、電荷を公転させること (軌道電子が実例) が出来ても、自転させる事はできない。」という重要な物理現象に帰着されるのです。ですから、軌道電子の運動をあらゆる状態方程式を得ても、スピン量子数は導出されません。渦なしの法則と命名した研究者はその物理描像が把握できていたのでしょうか。残念ながら、現代の私たちにはそれが伝わっていません。

将来的には、式 (49) を自分の手で解いて下さい。電子軌道に対するハードルが低くなるでしょう。

^a状態方程式 ϕ の動径関数の変数が主量子数 n で、これが K 殻、L 殻、M 殻、N 殻、O 殻、P 殻と名付けられていて、電子軌道の原点 (原子の中心) からの距離を支配します。球面調和関数の変数が方位量子数 ℓ 、磁気量子数 m です。動径関数が与えられた (n 値) により、 ℓ と m が制限され、3 変数が与えられた時に電子軌道が一義的に決まります。ちなみに、高校で習うのは、動径関数の変数の主量子数 n のみです。方位量子数 ℓ と磁気量子数 m は主量子数 n のもとで可能な値は決められます。動径関数の変数は n で、球面調和関数の変数は ℓ と m であることを、しっかりと確認してください。

<http://homepage3.nifty.com/rieki-index01/ryousikagaku/syuryousi.html>

スピン量子数は、量子数 (n, ℓ, m) の違いによる、スペクトルピークの分裂 (ゼーマン効果) を測定した時に、一本のピークのはずが、2 本に割れるピークで観測されたために発見されました。スペクトル観測技術の実験精度が上がって見つかったものなのです。

^b一方、角運動量演算子 \mathbf{L}, \mathbf{L}_z という演算子をご存知ですか? これらの演算子を作用させたら自動的に方位量子数 ℓ 、磁気量子数 m が出力されるといった量子力学の演算子です。これも量子力学を習い始めると、突如、現れるので、面食らってしまいますね。まず、対象になる状態方程式は、球面調和関数 ($Y_{\ell,m}$) のみです。角運動量演算子の代表例を記すと、

$$\mathbf{L}^2 Y_{\ell,m} = \ell(\ell+1)\hbar^2 Y_{\ell,m} \quad (50)$$

$$\mathbf{L}_z Y_{\ell,m} = m\hbar^2 Y_{\ell,m} \quad (51)$$

となります。 \mathbf{L} や \mathbf{L}_z の具体的な形を議論するのではなく、この演算子を軌道電子の球面調和関数作用させたら方位量子数や磁気量子数が自動的にはじき出される、いわゆるゆブロッグボックスなんです。しかし、このように書ける裏付けが、シュレディンガーの方程式を地道に解くと得られるんです。しかし、複雑な数式との格闘になり、書く手まで疲れてしまうので、物理描像をシンプルに理解するととても重要な手法として開発された演算子表記が、角運動量演算子です。これは、2 年前に私の師匠とメールのやり取りで教えて頂いたのですが、とても感銘を受けた議論でした。なかなか、ここまで授業では追えていないのが現状です。軌道電子のシュレディンガーの方程式を解いて、角運動量演算子との対応を考える授業は有意義ではないかと思えます。

4.2 微分・積分基礎定理

4.2.1 ガウスの定理とガウスの法則

(ガウスの発散定理) ベクトル場 $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k}$ において、区分的になめらかな閉曲面 S で囲まれた空間の領域を V とし、 S の内部から外部に向う法線ベクトルを $\mathbf{n}(\mathbf{r})$ とすると、

$$\iint_S \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}) dS = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) dV, \quad (52)$$

が成り立ちます。

(証明)

命題式左辺は、 $\mathbf{n} = \cos\alpha\mathbf{i} + \cos\beta\mathbf{j} + \cos\gamma\mathbf{k}$ と表して、下式のように変形しましょう。

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}) dS &= \iint_S (A_x, A_y, A_z) \cdot (\cos\alpha\mathbf{i} + \cos\beta\mathbf{j} + \cos\gamma\mathbf{k}) dS \\ &= \iint_S (A_x \cos\alpha + A_y \cos\beta + A_z \cos\gamma) dS \\ &= \iint_S A_x \cos\alpha dS + \iint_S A_y \cos\beta dS + \iint_S A_z \cos\gamma dS \end{aligned}$$

\mathbf{i} と \mathbf{n} のなす角が α ですから、 $\cos\alpha dS$ は x 軸に垂直な面 (yz 面) への dS の射影と考えられます。よって、

$$= \iint_S A_x dydz + \iint_S A_y dzdx + \iint_S A_z dxdy. \quad (53)$$

次に、命題式右辺を計算します。まず、 z 軸方向の計算をしましょう。この時、 V が2つの曲面 S_1, S_2 で、上と下から挟まれているとします。 S_1 は、 $z = f_1(x, y)$ 、 S_2 は、 $z = f_2(x, y)$ で与えられているとします。この時、

$$\begin{aligned} \iiint_V \frac{\partial A_z}{\partial z} dxdydz &= \iint_{\Omega} \left[\int_{z=f_1(x,y)}^{z=f_2(x,y)} \frac{\partial A_z}{\partial z} dz \right] dxdy = \iint_{\Omega} [A_z]_{f_1}^{f_2} dxdy \\ &= \iint_{\Omega} [A_z(x, y, f_2) - A_z(x, y, f_1)] dxdy \\ &= \iint_{\Omega} A_z(x, y, f_2) dxdy - \left\{ \iint_{\Omega} A_z(x, y, f_1) dxdy \right\}. \end{aligned} \quad (54)$$

一方、式 (53) に戻ります。 S の平曲面積分 \iint_S の定義は閉曲面外向きを正の方向とするので、平曲面 S を図のように S_1 と S_2 に分割した場合、 S_1 面上の A_z を $A_z(S_1)$ 、 S_2 面上の A_z を $A_z(S_2)$ と表記すれば、

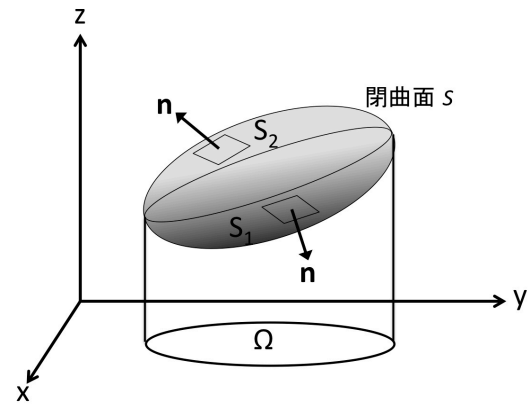
$$\iint_S A_z dxdy = \iint_{S_1} A_z(S_1) dxdy + \iint_{S_2} A_z(S_2) dxdy, \quad (55)$$

となります。 \iint_S の計算を S_1, S_2 から Ω に積分領域を変換すると、 z 方向下側にある S_1 面の積分は、被積分関数に (-1) をかけることになります。

$$\iint_{S_1} A_z(S_1) dxdy + \iint_{S_2} A_z(S_2) dxdy = - \iint_{\Omega} A_z(S_1) dxdy + \iint_{\Omega} A_z(S_2) dxdy. \quad (56)$$

したがって、式 (55), (56) より、

$$\iint_S A_z dxdy = - \iint_{\Omega} A_z(S_1) dxdy + \iint_{\Omega} A_z(S_2) dxdy, \quad (57)$$



となります。式 (57) の右辺と式 (54) の最終式は等しいので、

$$\iiint_V \frac{\partial A_z}{\partial z} dx dy dz = \iint_S A_z dx dy, \quad (58)$$

を得ます。 x, y 方向も同様な過程で、

$$\iiint_V \frac{\partial A_x}{\partial x} dx dy dz = \iint_S A_x dy dz, \quad (59)$$

$$\iiint_V \frac{\partial A_y}{\partial y} dx dy dz = \iint_S A_y dz dx, \quad (60)$$

が得られます。

(58) と (59) と (60) では、当然、左辺の和=右辺の和が成立します。よって、この3式の左辺と右辺の和を取ります。

$$\begin{aligned} \text{左辺の和} &= \iiint_V \frac{\partial A_x}{\partial x} dx dy dz + \iiint_V \frac{\partial A_y}{\partial y} dx dy dz + \iiint_V \frac{\partial A_z}{\partial z} dx dy dz = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) dV \\ &= \text{式 (52) の右辺}, \end{aligned} \quad (61)$$

$$\text{右辺の和} = \iint_S A_z dx dy + \iint_S A_x dy dz + \iint_S A_y dz dx = \iint_S \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}) dS = \text{式 (52) の左辺}. \quad (62)$$

したがって、式 (52) が証明されました。

式 (52) のガウスの定理の特徴を列記します。

- あるベクトル場 \mathbf{A} が微小面を通過する時、
 - ☆ この面に垂直な \mathbf{A} の成分は、この面を突き抜ける成分
 - ☆ この面に平行な \mathbf{A} の成分は、この面を滑って行く成分
- よって、この面を通過する流れは、 \mathbf{A} の垂直な成分と面積 dS の積； $\mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}) dS$ です^a
- 微小面の集まりとして、閉曲面 S をとらえ、ガウスの定理左辺で積分操作をして、領域 V への流入流出量を計算します。流出量は正、流入量は負です^b。
- 定理右辺が0であれば、この領域 V では流入したものが全て出るといっただけの流れを表しています。←定理左辺との対応を取ると、領域 V の全領域で、 $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ となりますので、領域内で、湧き出し口や吸込み口がないか、もしくは湧き出し量と吸込み量が相殺状態である事を示します。
- 定理右辺が負であれば、この領域 V 全体は吸込み口となります。←定理右辺との対応を取ると、この領域に場 \mathbf{A} の吸込み量 ($\nabla \cdot \mathbf{A} < 0$) が湧き出し量 ($\nabla \cdot \mathbf{A} > 0$) より多いと言うことになります。
- 定理右辺が正であれば、この領域 V 全体は湧き出し口となります。←定理右辺との対応を取ると、この領域に場 \mathbf{A} の湧き出し量が吸い込み量より多いと言うことになります。

^a \mathbf{A} の定義次第で比例定数が必要になりますが、この場合は細かい事を気にしないで進めます。

^b閉曲面の内側から外側へ向かう方向を法線ベクトルの正方向。

では、ガウスの定理を証明して理解した所で、ガウスの法則の例題をいくつか解いてみましょう。

例題 7

なめらかな閉曲面 S の中に 1 つの点電荷 q がある時、ガウスの法則の積分形式 (A) の左辺 $\int \int_S \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} \Delta S$ を計算してください。そして、式 (A) の右辺と整合が取れている事を確認して下さい。また、閉曲面の形に依存しない事を示して下さい。

(解) 電荷 q のある場所を原点にします。 S の閉曲面上 \mathbf{r} での電場ベクトル $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ は、

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon} \frac{1}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad (63)$$

法線ベクトル \mathbf{n} と \mathbf{r} のなす角を α とすると、

$$\frac{\mathbf{r}}{r} \cdot \mathbf{n} = \cos \alpha, \quad (64)$$

になります。今回は閉曲面 S 内部の電荷の位置を原点としたので、 $\alpha < 90\text{deg}$ となり、 $\cos \alpha > 0$ です。

ガウスの法則の積分形式 (A) の左辺に式 (63) を代入し、積分変数を式 (37) によって、面積素 ΔS から立体角 $\Delta\Omega$ に変換すると、

$$\int \int_S \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} \Delta S = \frac{q}{4\pi\epsilon} \int \int_S \frac{1}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} \cdot \mathbf{n} \Delta S = \frac{q}{4\pi\epsilon} \int \int_S \frac{1}{r^2} \cos \alpha \frac{r^2}{|\cos \alpha|} \Delta\Omega = \frac{q}{4\pi\epsilon} \int \int_S \Delta\Omega = \frac{q}{4\pi\epsilon} [\Omega]_0^{4\pi} = \frac{q}{\epsilon}, \quad (65)$$

ここで、原点は閉曲面 S 内にある点電荷なので、閉曲面 S に対応する積分範囲 Ω は $[0, 4\pi]$ 、また、 $\alpha < 90\text{deg}$ なので、 $\cos \alpha / |\cos \alpha| = 1$ です。 $\cos \alpha > 0$ という規定以外、閉曲面の形の規定をせずに得られた結果ですので、任意のなめらかな閉曲面で、式 (65) の結果が得られる事が明らかになりました。したがって、閉曲面内部の点電荷の大きさのみが、ガウスの法則の左辺の値の決定因子になり、ガウスの法則の積分形式 (A) の右辺 $\frac{1}{\epsilon} \iiint_V \rho(\mathbf{r}) dV$ と整合が取れる事が確認できます。

(例題 7 終了)

例題 8

閉曲面 S の中に点電荷 q_1 と q_2 が 2 つ存在するとした場合、式 (A) のガウスの法則の左辺を任意のなめらかな閉曲面で計算してください。

(解) それぞれの電荷のある位置を \mathbf{r}_1 と \mathbf{r}_2 とします。閉曲面 S の任意の点 \mathbf{r} の電場 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ は、

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left\{ q_1 \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|^3} + q_2 \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|^3} \right\},$$

となります。よって、式 (A) のガウスの法則の左辺は、

$$\int \int_S \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} dS = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left\{ \int \int_S q_1 \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|^3} + q_2 \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|^3} dS \right\} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left\{ \int \int_S q_1 \frac{\mathbf{r}'_1 \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r})}{|\mathbf{r}'_1|^3} dS + \int \int_S q_2 \frac{\mathbf{r}'_2 \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r})}{|\mathbf{r}'_2|^3} dS \right\},$$

ここで、 $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) = \mathbf{r}'_1$ 、 $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2) = \mathbf{r}'_2$ としました。閉曲面 S は 2 つの電荷の位置のどちらから見ても外形が変化する事はない事に注意すると、第一項は \mathbf{r}_1 から見た (\mathbf{r}_1 原点) とした閉曲面 S を、第二項は \mathbf{r}_2 から見た (\mathbf{r}_2 原点) とした閉曲面 S での積分です。どちらも S の中にあるので、式 (65) の時と同様に、全立体角積分に帰着されます。それに沿って計算すると、

$$\int \int_S \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} dS = \frac{1}{4\pi\epsilon} (4q_1\pi + 4q_2\pi) = \frac{q_1 + q_2}{\epsilon}.$$

注) 例題 7、8 とも、閉曲面内部の点電荷の合計が、ガウスの法則の左辺の値の決定因子になり、ガウスの法則の積分形式 (A) の右辺 $\frac{1}{\epsilon} \iiint_V \rho(\mathbf{r}) dV$ と整合が取れる事が確認できます。クーロンの法則にガウスの定理を適用して得られたガウスの法則ですから、整合がとれて当然ではあるのですが、手を動かして計算してみました。

例題 9

閉曲面 S の外に点電荷 q が 1 つ存在するとした場合、式 (A) のガウスの法則の左辺を任意のなめらかな閉曲面で計算してください。

ヒント) 点電荷のある場所を原点としましょう。そして図を描いて、立体角積分の変化を考察して、立体角の積分範囲を決定しましょう。

(解) 点電荷のある位置を原点として、 S の閉曲面の上の任意の点を \mathbf{r} とします。式 (A) のガウスの法則の左辺は、

$$\begin{aligned} \text{ガウスの法則の左辺} &= \iint_S \frac{q}{4\pi\epsilon} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{r^2} dS \quad (\leftarrow \text{面積積分から立体角積分へ}) \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon} \int_{\Omega} \frac{1}{r^2} \cos\alpha \frac{r^2}{|\cos\alpha|} \Delta\Omega. \end{aligned}$$

積分範囲については、図 5 に示したように、電荷のある原点に対して S が作る最大立体角を Ω_{\max} と置けば、2 つの $[0, \Omega_{\max}]$ 領域 (領域 1、領域 2) に積分範囲が分解できます。領域 1 では、 $\pi > \cos\alpha > \pi/2$ ですから、 $\frac{\cos\alpha}{|\cos\alpha|} = -1$ になります。領域 2 では、 $\pi/2 > \cos\alpha > 0$ ですから、 $\frac{\cos\alpha}{|\cos\alpha|} = 1$ になります。これらのことを考慮に入れて計算を続けると、

$$\text{ガウスの法則の左辺} = \frac{q}{4\pi\epsilon} \left\{ \int_{0; \text{領域 1}}^{\Omega_{\max}} \frac{\cos\alpha}{|\cos\alpha|} \Delta\Omega + \int_{0; \text{領域 2}}^{\Omega_{\max}} \frac{\cos\alpha}{|\cos\alpha|} \Delta\Omega \right\} = \int_{0; \text{領域 1}}^{\Omega_{\max}} -\Delta\Omega + \int_{0; \text{領域 2}}^{\Omega_{\max}} \Delta\Omega = 0.$$

結果より、閉曲面 S の外に電荷がない場合、式 (A) のガウスの法則の左辺の値は 0 になります。これによって、領域に電荷がないということは、電場ベクトルの湧き出し口や吸い込み口がないと言う事を確認できた事になるのです。

(例題 9 終了)

(注意事項)

この問題はなめらかな閉曲面を想定しましたが、なめらかでない閉曲面でも、同じ結果が得られます。その際、なめらかな微少閉曲面の集合としてなめらかでない閉曲面を捉えれば良いのです。

4.2.2 ストークスの定理と渦なしの法則

ストークスの定理は、

$$\iint_S \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}) dS = \int_C \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{t}(\mathbf{r}) ds, \quad (66)$$

です。右辺の s は C に沿った線分の長さ変数です。その閉曲線によって作られる曲面が S で、この閉曲面の取り方は無限にあります。(例題 5 で証明を行った様なものです^[10]。)

^[10] 場と物体との力学的な仕事のやり取り量；式 (E) を、閉曲線 C に沿って積分してみます。この時、場 \mathbf{A} の中で、物体が受ける力を： $\mathbf{F} = c\mathbf{A}$ とします。式 (E) の左辺に関する積分は、変数が微小面積 ΔS ですので、閉曲線 C に囲まれた曲面 S の二重積分になります。

$$\oint_C \Delta W = \left(\oint_C c\mathbf{A} \cdot \Delta \mathbf{s} \right) = \iint_{S \text{ circled by } ABCD} c \nabla \times \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \Delta S. \quad (67)$$

この式の第 2 式と第 3 式を取り出して、電荷 c で割って $\Delta \rightarrow d$ を書き換えれば、

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \iint_{S \text{ circled by } ABCD} \nabla \times \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS \quad (68)$$

となり、ストークスの定理が得られます。

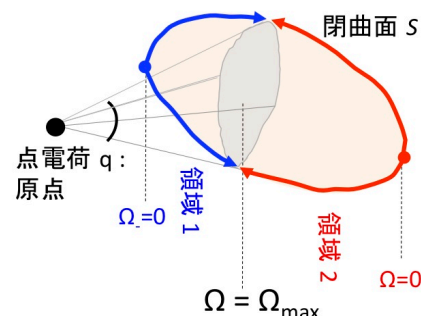


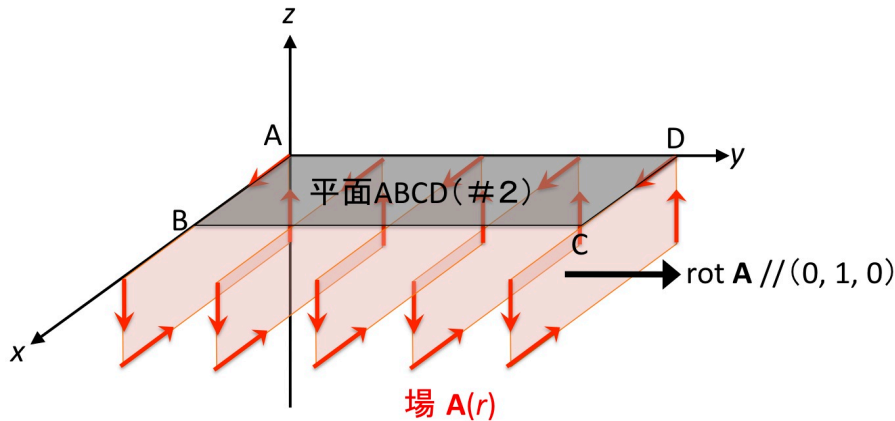
図 5: 例題 9 の図

厳密を期す方は、下記を参照してください。

http://fnorio.com/O110Green_theorem1/Green_theorem1.html

ストークスの定理の左辺は、場 \mathbf{A} の回転軸 ($\text{rot}\mathbf{A}$) の曲面 S に対する垂直成分の総和です。 $\text{rot}\mathbf{A} \neq 0$ で場 \mathbf{A} は回転運動を持っていたとしても、閉曲線 C の取り方次第によっては 0 になることもあります。その時、この閉曲線 C に対応した全ての曲面上 S 上では、全体として回転が起こっていないと考えます。例を取って考えてみましょう。

zx 面に図の様な一様な回転を持つ場 \mathbf{A} があります。 xy 平面上に閉曲線 ABCD を設定した場合。



この場合、数学的には $\text{rot}\mathbf{A} // (0, 1, 0)$ となります。

平面 ABCD 内に薄い物体を置いた場合、この物体は自転を起しませんが、 zx 面に薄い物体を置いたら、この物体は自転します。)。ですから、平面 ABCD 内の自転 (回転) 成分はないと考えられます。図を見れば明らかですが、ストークスの定理の定義式 (66) の左辺を計算すれば、数学的にも正しい事がわかります。つまり、 $\iint_{\text{平面 ABCD}} \nabla \times \mathbf{A} \cdot (001) dS = \iint_{\text{平面 ABCD}} (010) \cdot (001) dS = 0$ となるのです。また、ストークスの定理から、閉曲線 ABCD を境界とする曲面でも全体としては回転は起こらないことになるのです。

しかし、電場の場合はこんなに複雑ではありません。例題 6 で示したように $\text{rot}\mathbf{E} \equiv 0$ という恒等式があるため、ストークスの定理を電場にあてはめた時、左辺が常に 0 になるのですから、何と !!!

$$0 = \oint_C \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{t}(\mathbf{r}) ds, \quad (69)$$

となり、式 (B) の渦なしの法則の積分形を得るのです。電場の渦なしの法則はストークスの定理の中の**特解**です。

ここで、順を追って考えましょう。**渦なしの法則の微分形** $\text{rot}\mathbf{E} \equiv 0$ は、**クーロンの法則**；関係式 (38) と**数学的恒等式** $\nabla \times \nabla \equiv 0$ から得られます。一方、**渦なしの法則の積分形**は、電場の \mathbf{E} に数学の**ストークスの定理**を適用し、微分形の渦なしの法則 $\text{rot}\mathbf{E} \equiv 0$ を代入すると得られます。

渦なしの法則が語る最大の物理は、何度も書きますが、「静電場は、電荷に自転運動を引き起こさず、電荷に周期運動や並進運動のみを引き起し、螺旋運動を引き起こさない力場である。」と言う事なのです。それは、電場の中を任意の閉曲線上で電荷を一周させた時には、静電場と電荷の間でやり取りされる仕事量の収支が 0 になり、この電荷の運動状態に変化が生じない”と結論が下せるからでした。これを保証するのが、ストークスの定理の中でも特解の渦なしの法則の積分形 (B) です。そして、ストークスの定理の微分形 (D) からは、ミクロ的な「電荷に自転運動を引き起こさない。」ということが保証されるのです。

電荷は特異点 (2)

数学的には、 $\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r})$, $\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r})$ が存在できない場所は、 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ が表式できない電荷のある場所です。

ガウスの法則については、すでに、§3.2.2の“電荷は特異点 (1)”で、考察しました。

ここでは、渦なしの法則についても考えてみましょう。 $\text{rot} \mathbf{E} \equiv 0$ は恒等式ですから、電荷の湧き出し位置だろうが、回転場は決してありません。つまり、渦なし法則の微分形は電荷という特異点でも成り立ちます。それは、物理的には、電場の湧き出し方が渦を作る湧き出し方をしていないということを意味しています。ですから、閉曲線 C の上に電荷があっても左辺は必ず 0 になります。実は、式 (69) の渦なしの法則では、恒等式 $\text{rot} \mathbf{E} \equiv 0$ が存在するので、電荷のある場所を特異点と考える必要がありません。

4.2.3 定理と法則

一般にある関係が「法則」と呼ばれるときは、その関係が必然性や普遍性を持つ、もしくは、持つらしいと考えられる場合です。物理学的に観測された現象を説明するための説や式は法則となります。

一方、定理 (theorem) はある条件 (前提) のもとで数理論理学および数学において証明された真なる命題です。定理もある条件 (前提) を置いて数学的に証明されたことなので、条件が崩れれば定理も崩れると言った類いのものですので、絶対的なものではありません。必ず、前提条件を頭に入れた上で、理解して行く必要があります。

ガウス、渦なしの両法則の表式化は、クーロンの法則に数学のガウスの定理とストークスの定理を、それぞれ、適用させて得たことは、すでに §4.2.1 と 4.2.2 で示しました。両定理は、数学的には微分・積分学の基礎定理に組み込まれて、一般に、一変数関数 $y = f(x)$ の積分公式をベクトル場にまで押し広げられたものと捉えられています。

少し、難しいのですが、この微分・積分学の基礎定理の命題 (文章表現) を紹介します。**ある量の微分を特定の領域で積分した値は、その領域の境界でその量を積分する事によって得られる。** この命題を真に受けて、「クーロンの法則に同類の両定理を適用したのだから、得られる両法則は同類でしょう。」という勘違いを起こすと、頭の中が混乱してしまいます。そのために、はっきりと記しますが、物理的には**クーロンの法則にガウスとストークスの定理を適用したら、それぞれ、ガウス、渦なしの法則が得られ、それぞれの法則が語る物理も異なるのです。** この物理的あらずじをきちんと掴むのが、このテキストの一大目的の 1 つです。

4.3 電場の誕生

ところで、今までは当たり前の様に積分形と微分形の表示を同等の様に使用して来ましたが、ここに遠隔作用と近接作用という重要な物理的概念が潜んでいます。1678年に**ニュートン**が考えた万有引力は物と物が存在すれば接触しなくとも引力が生じますが、その両者の間の空間には何の変化も求めていません。そのように力が作用しあう事を**遠隔作用**と呼んでいます。この考え方は1785年のクーロンとキャベンディッシュらの電荷間での作用する力の測定実験でも踏襲されていました。**遠隔作用**では、静電場中の2つの基本法則は適当な有限範囲で記す積分形では成立するのですが、任意の局所的な点では成り立たないことになります。つまり、限定された範囲での積分形でしかこれらの法則を書き表せないと言う事になります。しかし、この遠隔作用の解釈に終止符を打ったのが、**ファラデー**でした。彼は1830年に電磁誘導の法則を発表しましたが、それとほぼ同じ内容の研究が、一年前にフランチェスコ ツァンデスキー、半年前にジョゼフ ヘンリーによって発表されていました。しかし、**ファラデー**以外の2名は**遠隔作用**の立場での解釈でした。一方、発表が遅れた**ファラデー**は電荷の間に力が働くのは、間の空間にある種の変化が生じ、それが力を伝えるからだと考えました。これが**近接作用**の考え方です。とても、重要ですが、近接作用の導入によって、始めて空間内の連続的变化を定義でき、ガウスや渦なし法則の微分形の存在が意味を持ちます。これを発展させて数学的な表現を与えたのが**マクスウェル**で1864年のことです。あの有名な**マクスウェル**の方程式の誕生です。これに基づき、電磁波の存在の予測がなされました。電荷が静止している静電場は、どちらの作用でも説明する事が可能です。しかし、動く電荷の場合は、近接作用の立場に立たないと、ある場所で電荷が動いた変化が、そこから離れた場所に伝わるのに一定の時間を要する事実が説明ができません。場という概念は**ファラデー**と**マクスウェル**によって考え出されましたが、現代の物理学では自然現象全般を理解する上では最も基本的な

見方です。このような概念を生み出した点では電磁気学は重要な役割を果たしたと言えるでしょう。上記の成果とラプラスの活躍期間を年表にまとめてみました。

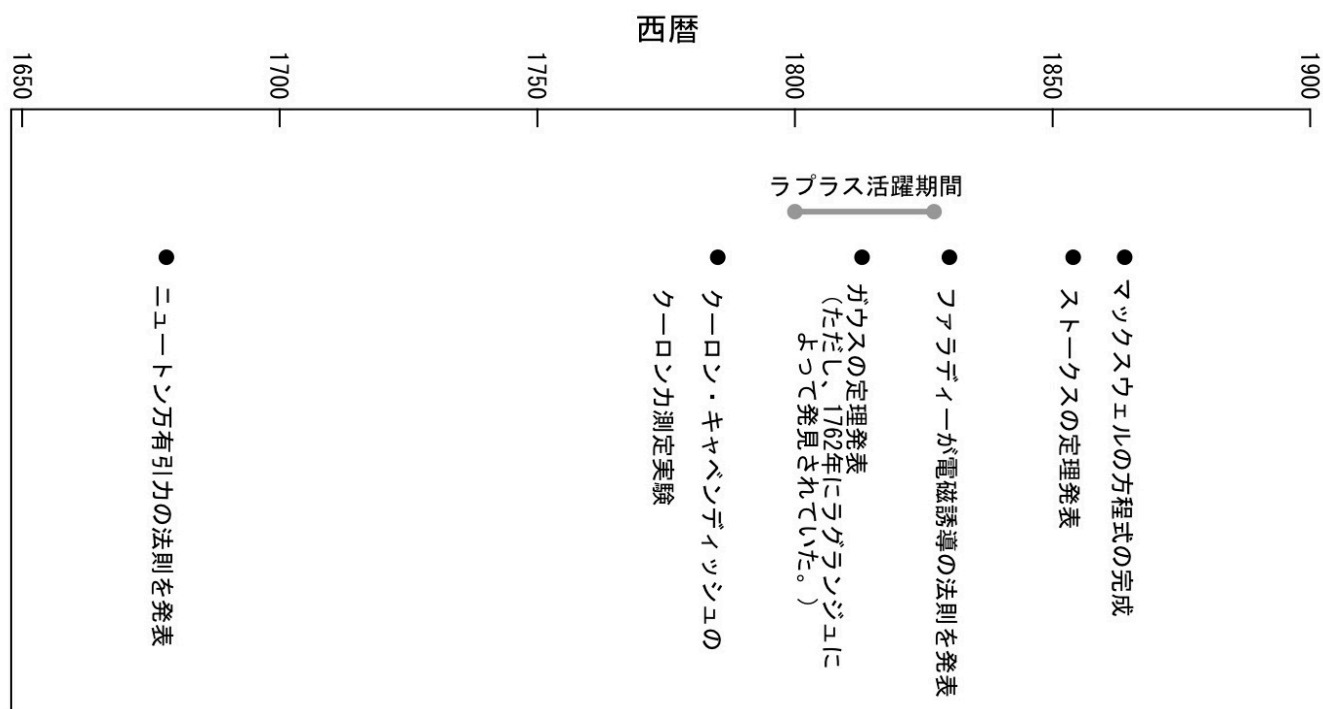


図 6: 電磁気学黎明期の成果年表

磁荷

電荷と違って磁荷は単位磁荷がないので、定常電流のまわりに出来る円形の磁場 ($\text{rot}\mathbf{H}$) に沿ってNS極が一体になった磁荷を一周させる事しかできないので、 $\text{rot}\mathbf{H} \neq 0$ であっても、N極とS極で相殺がおり、磁場と一体磁荷の間での仕事の収支は0になるということになります。物理学的には電場よりもかなり実在感がないのですが、磁石に鉄がくっつくのを見ると、なるほどすごい力だなを感じます。

このテキストを書きながら、場について考えましたが、分からない事だらけです。電場にしても磁場にしても実際に電荷があつてこそ、仕事のやり取りがあるわけですが、場を作るのにエネルギーは必要なの？まあ、必要なんだろうが、そのエネルギーはどこから供給されるの？どうしても、他の存在を介入させないと手詰まり状態になってしまいます。もしかしたら、宇宙に満ちている暗黒物質の存在を取り入れるべきで、昔の人が提唱した、「この世はエーテルで満ちている。」のエーテルとは暗黒物質のことなのかなと考えています。

現実の物理に戻ります。自然界では強い相互作用、弱い相互作用、電磁相互作用、重力相互作用という4つの相互作用により力が発生すると考えられています。これら全てを統一できる大統一場理論を完成させるのがインシュタイン博士、そして物理界の悲願だと主張されている方々もいます。ちなみに電場と磁場の統一場が電磁気学、電磁気力と弱い力を統一した電弱統一理論、重力と電磁気力は超弦理論で説明できる、といくつかの統一場は果たされています。しかし、このような大そうな誓願を立てる前に、力学、電磁気学、統計力学、量子力学の見直しという基本に立ち返る時期ではないかと感じています。

場と電子スピン —意外と楽しいサイドメニュー (5) —

電子は $\frac{h}{2}$ と $-\frac{h}{2}$ という量子数の自転 (スピン) ^aがある事が、軌道電子のゼーマン効果の実験などで示されました。くどいようですが、静電場下の軌道電子のシュレディンガー方程式を解いても、軌道電子の状態方程式には、電子の周期運動を表す角運動量が入っていても、スピンの情報は得られません。電子スピンは電子であれば、自由電子、軌道電子等の状態のいかに関わらず、必ず持つ電子固有の物理現象です。

電子は素粒子 (第一世代のレプトングループ) とされています。そして、電子のスピン量子数は上述の2つの値しか持たないということはディラクの方程式により自動的に導きだせるそうです。しかし、電子スピンがどのような現象かは具体的に把握されていないのが現状のようです^b。

電子は質量を持ちますが、一般に構造を持たないと言われています。しかし、ここであえて、「電子はあるエネルギー場である。」と仮定1を置きます。その仮定1の下で、仮定2として、そのエネルギー場の $\text{rot } \mathbf{A}$ が0になっていないとしてみます (演算子 rot は、場 \mathbf{A} が、 $\text{rot} \mathbf{A} > 0$ なら右手系の回転に、 $\text{rot } \mathbf{A} < 0$ なら左手系の回転になります。)。さらなる仮定3で、電子のエネルギー場が $\text{rot} \mathbf{A} > 0$ なら電子であり、 $\text{rot } \mathbf{A} < 0$ なら陽電子だったとしましょう。そうすると、電子対消滅は電子と陽電子のエネルギー場の相殺に帰着できます。こんなに簡単にはいかないのかもしれないですが、案外、複雑ではないのが物理の世界だと思います。「電子は一般に構造を持たない。」という発展性のない、わかりにくい前提では、大勢の人にとって、研究が次のステップに進みにくくなってしまいます。この分野はフリーエネルギーの発想が飛躍的に刷新できる期待が寄せられ、地球環境や人類に還元する事のできる分野であると私は感じています。

また、素粒子物理については密室の話と莫大な予算 (加速器等) がついてまわります。超マイクロ・超高エネルギー世界の話で、普通の人が検証することが不可能だというベールに包まれています。これも、人類にとっては不利益な話です。私は、もっとヴィジュアルにわかりやすい説明が出来る時代と人材の到来を待望しています。

^aパウリはスピン量子数を 2×2 行列で表す方法を提案し多くの量子力学の物理を行列で説明する事に成功しました。

^b難しいですが、「量子力学におけるスピンの起源は何か」松原邦彦著が、良きに付け悪きに付け、とても参考になると思います。ウェブアドレスは、

<http://www2.marukotv.jp/cil/physics/spinor.pdfsearch=> 量子力学におけるスピンの起源は何か' です。

5 終わりに

5.1 近代の自然科学の発展

科学といえば、西洋のお家芸のような印象を抱いて研究・勉強をしている理工系の方々も多くいると思います。かく言う私もそのうちの一人でした。科学と言ってもあまりにも曖昧な言葉で、もう少し厳密に言おうとすれば、自然科学の数学、物理、化学、生物、地学、工学の云々…、と言った表現になります。古代文明期では、種を蒔く時期を知るための天文観測、身体の不調を改善するための医術、そして治水工事のための土木が発達していたと伝えられています。普通に生活を営む庶民たちにとっての科学の原点は、これらの実用性の高い科学であったことは間違いありません。古代文明が発生した地域では、その繁栄した時代に王などの強いリーダーシップのもとで実用性の高い科学が飛躍的に発達しましたが、それに伴って、武器を作る技術が発達します。ところが、私達が西洋と呼んでいるドイツ、フランス、イギリス、イタリア、ロシア (もちろんアメリカも) は古代文明が栄えた場所ではなかったので、中世までは中国やアラビア世界と比べると科学に限らず様々な分野において後進国でした。そのため、西洋社会が科学の主席の座を射止めたのは、意外にも近代以降です。

ギリシャ時代になると実用性一辺倒だった科学とは少し異なる自然科学が生まれてきました。代表的なものとして、ピタゴラスの三平方の定理やユークリッドによる幾何学の基礎などが発見がされ、最終的にはアリストテレスがギリシャ時代の自然科学を『自然学』に集大成しました。しかし、この時代は自然科学が哲学の一種であって独立

した分野とは考えられていませんでした。そして、中世ヨーロッパではこのアリストテレスの『自然学』が踏襲され、フランシス・ベーコンやガリレオ・ガリレイの出現（16世紀）を待つまで、大きな変化・発展はありませんでした。しかし、この時期のアラビアや中国ではアリストテレスの『自然学』に束縛されない独自の科学を発展させていきました。中世時代（A. C. 476～1453）以前では科学技術として中国（唐）で発明された火薬や羅針盤と一緒に、数学やその他の科学・技術がイスラム世界を通じてヨーロッパに伝わっていきました。そして、中世では中国やアラビア世界において王朝の保護を受けて科学・技術は盛んに研究されていきました。その名残として、私達が使用する数字はアラビア数字ですし、1500年から1600年代で活躍した偉大な科学者ガリレオ・ガリレイやフランシス・ベーコンはアラビア語の本で勉強したようです。数学でも、現代数学の流れを作ったフェルマーはアラビア語の本を取り寄せて、その本に注釈を書き入れて行くという形式で研究を進めていました。

ヨーロッパの中世はというと、なかなか王朝や国が安定に存在できず、学問はキリスト教会が担っている状況が続いていました。そのような中で、アリストテレスの『自然学』が踏襲されスコラ学という学問形態が発達していきました。スコラ学の手法は、問題に対する解答を矛盾がなくなるように導き出す事で、古代ギリシャの哲学形態を引き継いでいます。この時代のスコラ学では「神は、聖書という書物と、自然という書物をお書きになった。」と考え、「聖書を読めば神の意図を知ることができ、自然を読むことも神の意図や目論見を知る上で大切だ。」と考えられたようです。スコラ学自体は特定の学問をさすのではなく諸学問に適応される論理学ですが、当時はキリスト教会が学問の責務を担っていたので、どうしても聖書がスコラ学の研究対象になってしまい神学に重きが置かれる様になってしまいました。

中世ヨーロッパでは、キリスト教会は、科学をあまり重要としない姿勢を貫いたのですが、それはどうしてでしょうか？そして、結果として、せつかく発展したスコラ学が、カトリック教会やそれを支える教義に束縛されたので、それらをゆるがすような命題は避けなければ学問が続けられないという状況を作り出していました。残念ながら、アリストテレスの『自然学』とキリスト教会は、1000年以上の長きにわたりヨーロッパの科学の進歩を鈍らせる役割を果たしていたという結果が、現代の私たちからは見えてきます。

しかし16世紀に入るとヨーロッパではマゼランによる世界一周から大航海時代、新地開拓時代を迎え、国家が力を蓄え、教会勢力は弱まっていきます。そして、1517年のルターの宗教改革により、カトリック教会やそれを支える教義をゆるがす様な命題が議論できる状況になりました。

それに追い打ちをかけるように、1600年から、ガリレオに続き、ニュートンが出現し、1800年代にいたる200年にわたって、アリストテレスの『自然学』やカトリック教会の壁を打ち破るような偉大な研究者がたくさん出現しました。これが、自然科学がヨーロッパで飛躍的に進歩を遂げた原因です。この時期は、ヨーロッパに限らず、人類の科学力が一挙に高まった時期といえるでしょう。

ただ、この変革期には、偉大な科学者ガリレオが地動説による宗教裁判によって有罪となり、その生涯の最後の26年を軟禁生活で過ごすという事態も起きています。ちなみに、ガリレオはとても敬虔なカトリック教徒だったので、きっと、神のお書きになった自然と言う書物を誠意をもって読んだ結果が、“地動説は正しい。”ということだったのでしょう。

しかしながら、スコラ学は近代以降の目覚ましい科学の発展を支えた1つの要因だと私は感じています。なぜならば、スコラ学の論理展開法が科学分野で非常に有意義だったと考えられるからです。それは、西洋のスコラ学からのアプローチだと、1つの命題に対して矛盾をなくせる論理が正解であるという白黒はっきりした結論が得られるからです。他方でスコラ学的な論理展開法だとポイント的な情報を得ることになってしまい、広範囲におよぶ問題の把握にはハンディーがあります。ところが、中国などの東洋地域では状況の関連性を重視する傾向があるとされており、厳密性に欠けたり、問題解決までに時間を要してしまうのですが、広範囲におよぶ問題の処理には有利だと思われれます。これらは西洋科学と非西洋科学の言葉を用いて、沢山の議論がなされていますので興味がある方は調べてみて下さい。どの人もこの両方の性質を持ち合わせていると思いますが、私の学生時代はおおかたの学生は論理展開はとても苦手だったと思い返しています。私も沢山の結果を集めてみて何となくこんな感じ！と曖昧な議論をして指導教官から指導を受けていました。その点では私も非西洋科学的な思考が強かったのでしょう。たまに自分の研究を振り返り、どちらの性質に偏っているのかなと考えてみて、少ない方の性質を利用する様に心がけてみると案外と良い策が得られるかもしれないです。

科学はギリシャ時代では必ず哲学の下に、中世ではそれを重要としない姿勢を貫いたカトリック教の下で展開されてきました。しかし、近現代になり人類の科学的能力が高まってきたところで、次は強力な国家が出現し、その保護

のもとで科学が発展していきました。さらに、危険な事は、近現代でも、聖書による神からの大義名分は生き残ったまま、国家戦略・国益を最優先を正当化してしまい、国家の勝手な振る舞いによって、原子爆弾、枯れ葉剤といった悲劇を生みました。これからは、国家・国益、神の目論みなんて概念をとっばらい、地球に住む人類を含む全生命が安心して、共に生きて行くことのできる世界の実現に向けて科学がどうあるべきか、を探索しなくてはならない時期が到来していることを感じて下さい。

5.2 自然科学の歩みから考えるこれから

当初、私がこのテキストを書いた際、ガウスの法則や渦なしの法則の式(A)~(D)を一挙に載せ、式の意味を解説して終わりでした。これでは、本人ですら、わだかまりが残りすっきりしませんでした。そして、これを論理的に解決し始めるのに、かなりの時間を要しました。その原因は、教科書は絶対的だという権威を疑わなかったためでした。そうすると、自分の軸を動かさざるおえなくなるのです。自分の中でわかったように、無理矢理、頭の中で辻褄を合わせだしてしまっただけです。しかし、自分の中のわからないという気持ちに、向合う必要を強く感じて、再度、静電場を読み直した時、教科書の落とし穴が次々に見えてきました。それらは、事象の一部だけを書き出す、物理用語の定義の不適切、そして書かなくてはならない式変形の省略等々です。これには本当に驚愕しました。

物理学のわかりにくさの元凶は、就学者の理解力が低いのではなく、教科書やシステムであるのです。

この認識は、幸運にも、かなり時間をかけて物理と向い合えたために見えたものです。しかし、物理を修学する各個人が、その事に気付かないと、権威付けられた論理からの軌道修正が出来ないのです。そのために、私もこのテキストを最終まで書き上げるのに2年半を費やしました。手始めは、さらに1年遡ります。さらに、世の中の支配構造の観察し、そして、これを書いていて気付いたことを考え合わせると、これらは、かなり昔に故意的になされたという確信に至りました。後世の人達が、正しく追えないように、とても巧妙になされているのです (§3.2 チームラプラス参照やアリストテレス『自然学』等)。教科書を書いた人達が全てそれを踏襲したわけではないのですが、開示されている良書が悪書に比べてはるかに少ない上に、職業で物理をしている人達は、報酬の一環として大量な事務仕事に時間が割かれるため(これも残念ながら畏)、謎解きに使う時間がなく、さらに、研究者の人達も歪んだ基礎の上に立たされているので、事態は深刻化の一途を辿りました。しかし、幸運にも、静電場の分野は、点と点をつなぐ経路がバラバラでも、個々の点が正しかったのです。このような、トリックは静電場だけで起きている事ではないでしょう。力学、統計力学、電磁気学は、個々の点は正しいと思って良いと思います。これらを改訂していくと、量子力学、物性学を捉える力が遥かに高い視点で見えてくる事でしょう。磁性大家の先生が、「基本に立ち返れ。」と、後輩研究者に助言なさっていたのに、まじめに取り合わなかった次の世代の光景を思い出すにつけ、きちんと、誠実に話をしておられた方もいらしたのだと、そういう方が“点”の正しさを守って下さったのかなと感じます。しかし、多勢に無勢だったのでしょう。そして、その当時、私はこの事件がとても心に引っかかったのですが、その先生の言い分が正しかったと理解するのに、自分がこれほど時間を要したということ、これほどまでに大きな罫になるまで止められなかったことが悔やまれます。

次に、ストークスの定理の歴史的背景を調べると、また、面白い物理の背景が見えてきました。ストークスの定理を調べようと、インターネットで検索していると、

<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~okamoto/paper/green/node5.html> → presented by Kazuko Suenaga
に行き当たりました。内容を抜粋すると、

「ストークスの定理は電磁気学や流体力学を学ぶときには必須の働きをする重要なものであるが、これが印刷されたものとして最初に世に現れたのはケンブリッジ大学の試験であったというのには全く驚かされる。を見たこともない学生は、「これを証明せよ」という試験を出されても困惑したであろうことは想像に難くない。ストークスが試験に出したのでストークスの定理と呼ばれているのであるが、それを最初に証明したのはウィリアム・トムソンで、彼がケンブリッジに向かう列車の中でこの積分定理を思いつき、それをストークスへの手紙に書いて、それをストークスが試験問題に出したのがストークスの定理と呼ばれようになったゆえんであるということである。従って、本来これはトムソンの定理(あるいは、トムソンはその後ケルヴィン卿となったのでケルヴィンの定理)と呼ばれるべきである—これが現在の我々の常識であろう。しかし、ケルヴィンは自分の著書でもこれに対する先取権を主張していないところから見て、当時の人々には現在よく言われるような「Publish or Perish (論文を書け。さもなくば死

ね.)」といった状況はなかったのであろう。このふたりは大変仲のよい友人で、互いに尊敬しあっていたということである。」

とあります。

内容の信憑性は私にはわかりません。

しかし、最近論文が重要視されて、文中の「論文を書け. さもなくば死ね」的な所があるのは確かな様です。しかし、実際は、論文がヤミクモに書かれていて、内容がない、もしくは、少ないので、読み手に真意が伝わってこなかったり、混乱を与えると云ったものが多すぎると感じてなりません。さらに、この引用で肯定しているように、仕事の主体が誰なのかが不透明なのです。この状況は非常に深刻だと思います。これらも、科学業界システムの腐敗の冰山の一角でしょう。最優先課題は、「研究システムおよび教科書を刷新しましょう！さもなくば研究者は同じ所をぐるぐる回って時間が過ぎるのみ！」です。まじめに取り組んでらっしゃる研究者の方が多いいのは本当です。しかし、研究とは直接関係のない、たくさんの事務に追われる罫で苦しんでらっしゃいます。ですから、教科書を見直すどころか、変えるべきシステムへの挑戦がなされないまま、現在に至りました。何度かは刷新のチャンスがあったはずですが、毎回、支配者達によって、巧妙にその芽がつかまれてきました。特権的な団体の支配をやめさせるためには、各研究者が研究業界になされた落とし穴に気付かなくてはならない時期なのです。皆さんの選択は、既存の科学業界ですか？それとも、誰もが理解でき平和に貢献できる科学ですか？