静電場演習

目 次

平成 27 年 10 月 21 日

1　問題１　計算（逆三角関数の微分）

（１）から（３）の関数 $\theta(x)$ の微分 $d\theta/dx$ を計算してください。

(1) $\theta(x) = \arccos x \;\; (0 \leqq \theta < 2\pi)$,　(2) $\theta(x) = \arcsin x \;\; (0 \leqq \theta < 2\pi)$,　(3) $\theta(x) = \arctan x \;\; (0 \leqq \theta < \pi)$

（解）

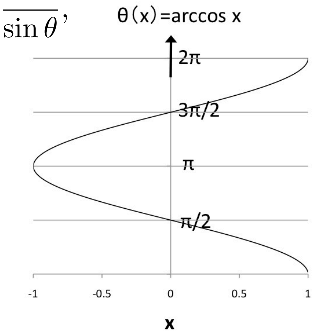
（１）

$$x(\theta) = \cos\theta, \Rightarrow \frac{dx}{d\theta} = -\sin\theta, \xrightarrow[\text{の対応なので、微分関数の逆数が逆関数の微分}]{\text{１つの独立変数}\ x\ \text{に対して、１つの従属変数}\theta} \frac{d\theta}{dx} = -\frac{1}{\sin\theta},$$

$\sin\theta = \pm\sqrt{1-\cos^2\theta} = \pm\sqrt{1-x^2}$　ゆえ、

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{d}{dx}\arccos x = \begin{cases} \text{定義不可}\ (\theta = 0, \pi) \\ -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ (0 < \theta < \pi), \\ \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ (\pi < \theta < 2\pi). \end{cases}$$

（問題１（１）終わり）



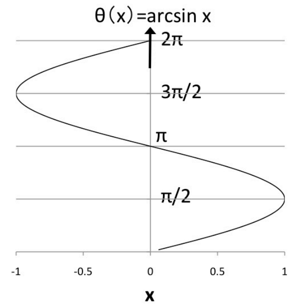
（２）

$$x(\theta) = \sin\theta, \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{d\theta} = \cos\theta, \quad \xrightarrow{(1)\ \text{同様}} \quad \frac{d\theta}{dx} = \frac{1}{\cos\theta},$$

$\cos\theta = \pm\sqrt{1-\sin^2\theta} = \pm\sqrt{1-x^2}$　ゆえ、

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{d}{dx}\arcsin x = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi) \\ \text{定義不可}\ (\theta = \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}) \\ -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{3\pi}{2}) \end{cases}$$

（問題１（２）終わり）



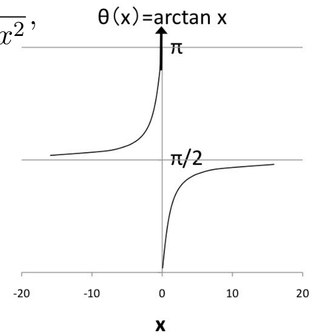
（３）

$$x(\theta) = \tan\theta, \Rightarrow \frac{dx}{d\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta} = 1 + \tan^2\theta, \xrightarrow{(1)\ \text{同様}} \frac{d\theta}{dx} = \frac{1}{1+\tan^2\theta} = \frac{1}{1+x^2},$$

ゆえに、

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{d}{dx}\arctan x = \frac{1}{1+x^2}.$$

（問題１（３）終わり）



2　問題２　計算（直交座標から極座標への書き換え）

ラプラシアン $\triangle$ を直交座標で表記すると $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ でしたが、これを下記の順に従って極座標 (r, θ, ϕ) の変数を用いて書き表してください。

(1) x, y, z を r, θ, ϕ で表してください。

(2) r, θ, ϕ を x, y, z で表してください。

(3) $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} = \dfrac{\partial}{\partial x} \times \dfrac{\partial}{\partial x}$ となります。また、$\dfrac{\partial}{\partial x} = \dfrac{\partial r}{\partial x}\dfrac{\partial}{\partial r} + \dfrac{\partial \theta}{\partial x}\dfrac{\partial}{\partial \theta} + \dfrac{\partial \phi}{\partial x}\dfrac{\partial}{\partial \phi}$ という関係を使って $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$ を極座標変数の微分形 $\dfrac{\partial}{\partial r}$, $\dfrac{\partial}{\partial \theta}$, $\dfrac{\partial}{\partial r}$ で表してください。

(4) $\dfrac{\partial r}{\partial x}, \dfrac{\partial \theta}{\partial x}, \dfrac{\partial \phi}{\partial x},$ を計算してください。

(5) $\dfrac{\partial^2 r}{\partial r \partial x}, \dfrac{\partial^2 \theta}{\partial \theta \partial x}, \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial \partial x}$ を計算してください。

(6) ラプラシアン $\triangle$ を極座標 (r, θ, ϕ) の変数で書き表してください。

(解)

（1）
$$x = r\sin\theta\cos\phi, \tag{1}$$
$$y = r\sin\theta\sin\phi, \tag{2}$$
$$z = r\cos\theta. \tag{3}$$

(問題２（1）終わり)

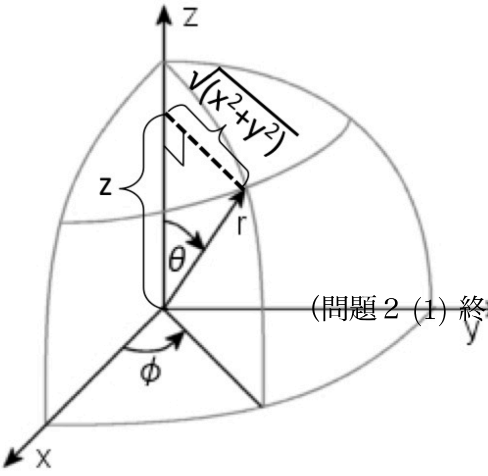


図 1: 極座標系の定義図

変数名は r が動径、θ が天頂角、ϕ が方位角とされたり、θ と ϕ は偏角１、偏角２と書かれる場合もあります。

（2）
$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}, \tag{4}$$
$$\theta = \arctan\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}, \tag{5}$$
$$\phi = \arctan\frac{y}{x}. \tag{6}$$

(問題２（2）終わり)

（3）
$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\times\frac{\partial}{\partial x} = \left\{\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial\theta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\phi}\right\}\times\left\{\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial\theta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\phi}\right\}\\ &= \frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial}{\partial r}\left\{\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial\theta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\phi}\right\}+\frac{\partial\theta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\theta}\left\{\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial\theta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\phi}\right\}+\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\phi}\left\{\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial\theta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\phi}\right\}.\end{aligned} \tag{7}$$

表記を

$$\frac{\partial p}{\partial g} = p^{(g)}, \qquad \frac{\partial^2 p}{\partial p'\partial g} = p^{(p'g)}, \tag{8}$$
ただし、$p, p' = r, \theta, \phi, g = x, y, z.$

と定義します。式（7）の第１項、第２項、第３項を順に計算します。

$$\begin{aligned}\text{式（7）第１項} &= r^{(x)}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{(x)}\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial r}\left(\theta^{(x)}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{\partial}{\partial r}\left(\phi^{(x)}\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\right\}\\ &= r^{(x)}\left\{r^{(rx)}\frac{\partial}{\partial r}+r^{(x)}\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\theta^{(rx)}\frac{\partial}{\partial\theta}+\theta^{(x)}\frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta}+\phi^{(rx)}\frac{\partial}{\partial\phi}+\phi^{(x)}\frac{\partial^2}{\partial r\partial\phi}\right\},\end{aligned} \tag{9}$$

$$\text{式（7）第２項} = \theta^{(x)}\left\{r^{(\theta x)}\frac{\partial}{\partial r}+r^{(x)}\frac{\partial^2}{\partial\theta\partial r}+\theta^{(\theta x)}\frac{\partial}{\partial\theta}+\theta^{(x)}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\phi^{(\theta x)}\frac{\partial}{\partial\phi}+\phi^{(x)}\frac{\partial^2}{\partial\theta\partial\phi}\right\} \tag{10}$$

$$\text{式（7）第３項} = \phi^{(x)}\left\{r^{(\phi x)}\frac{\partial}{\partial r}+r^{(x)}\frac{\partial^2}{\partial\phi\partial r}+\theta^{(\phi x)}\frac{\partial}{\partial\theta}+\theta^{(x)}\frac{\partial^2}{\partial\phi\partial\theta}+\phi^{(\phi x)}\frac{\partial}{\partial\phi}+\phi^{(x)}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right\} \tag{11}$$

したがって、

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x^2} &= \text{式（7）第１項}+\text{式（7）第２項}+\text{式（9）第３項} = \text{式（9）}+\text{式（10）}+\text{式（11）}\\ &= \left\{r^{(x)}\right\}^2\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\left\{\theta^{(x)}\right\}^2\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\left\{\phi^{(x)}\right\}^2\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}+2r^{(x)}\theta^{(x)}\frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta}+2r^{(x)}\phi^{(x)}\frac{\partial^2}{\partial r\partial\phi}+2\theta^{(x)}\phi^{(x)}\frac{\partial^2}{\partial\phi\partial\theta}\\ &+ \left\{r^{(x)}r^{(rx)}+\theta^{(x)}r^{(\theta x)}+\phi^{(x)}r^{(\phi x)}\right\}\frac{\partial}{\partial r}+\left\{r^{(x)}\theta^{(rx)}+\theta^{(x)}\theta^{(\theta x)}+\phi^{(x)}\theta^{(\phi x)}\right\}\frac{\partial}{\partial\theta}+\left\{r^{(x)}\phi^{(rx)}+\theta^{(x)}\phi^{(\theta x)}+\phi^{(x)}\phi^{(\phi x)}\right\}\frac{\partial}{\partial\phi},\end{aligned} \tag{12}$$

$\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ と $\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ の場合は上記の式において、x ⇒ y, z と書き換えれば得られます。

(問題２（3）終わり)

（4）

$$\frac{\partial r}{\partial x}=r^{(x)}=\frac{\partial}{\partial x}\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\times 2x$$
$$=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{x}{r}=\sin\theta\cos\phi, \tag{13}$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial x}=\theta^{(x)}=\frac{\partial}{\partial x}\arctan\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}\right)=\frac{1}{1+(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z})^2}\cdot 2x\cdot\frac{1}{2z\sqrt{x^2+y^2}}$$
$$=\frac{z^2}{z^2+x^2+y^2}\cdot\frac{x}{z\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{xz}{r^2}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$
$$=\frac{1}{r}\cos\theta\frac{1}{\sqrt{1+(y/x)^2}}=\frac{\cos\theta}{r}\frac{1}{\sqrt{1+\tan\phi^2}}$$
$$=\frac{\cos\theta}{r}\cos\phi=\frac{\cos\theta\cos\phi}{r}, \tag{14}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}=\phi^{(x)}=\frac{\partial}{\partial x}\arctan\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}\cdot\frac{-y}{x^2}=\frac{-y}{x^2+y^2}=-\frac{\sin\phi}{r\sin\theta}. \tag{15}$$

表 1: $\frac{\partial p}{\partial g}\{p=r,\theta,\phi\ \ ;g=x,y,z\}$ の計算

	独立変数；p		
	r	θ	ϕ
$\frac{\partial}{\partial x}$	$r^{(x)}=\sin\theta\cos\phi,$	$\theta^{(x)}=\frac{\cos\theta\cos\phi}{r},$	$\phi^{(x)}=-\frac{\sin\phi}{r\sin\theta}$
$\frac{\partial}{\partial y}$	$r^{(y)}=\sin\theta\sin\phi,$	$\theta^{(y)}=\frac{\cos\theta\sin\phi}{r},$	$\phi^{(y)}=\frac{\cos\phi}{r\sin\theta}$
$\frac{\partial}{\partial z}$	$r^{(z)}=\cos\theta,$	$\theta^{(z)}=-\frac{\sin\theta}{r},$	$\phi^{(z)}=0$

$r^{(x)}$, $\theta^{(x)}$ $\phi^{(x)}$ 以外にも、$r^{(y)}$, $\theta^{(y)}$ $\phi^{(y)}$, $r^{(z)}$, $\theta^{(z)}$ $\phi^{(z)}$ の計算値を表 1 に記します。（問題 2（4）終わり）

例えば $\frac{\partial\theta}{\partial x}$ **!!!**　式（1）を使って $x=r\sin\theta\cos\phi$（☆）なので $\frac{\partial x}{\partial\theta}=r\cos\theta\cos\phi$(これは正しい！) となるために、その逆数を取って、$\frac{\partial\theta}{\partial x}=\frac{1}{r\cos\theta\cos\phi}$ としてしまいたい所です。しかし、これは間違いです。

偏微分 $\frac{\partial\theta}{\partial x}$ は、従属変数が θ が、独立変数 x とこれに独立な y,z で表式された時に、x のみを微分変数、他を定数として微分する計算です。つまり、$\theta(x,\ y,\ z)$ と表式されていて、始めて簡単に計算されるのです。

間違いの計算ですと、$\theta=\arcsin(\frac{x}{r\cos\phi})$ を x で偏微分する事になります。つまり、$\theta(x,r,\phi)$ という表式における θ の x 偏微分となるのですが、r も ϕ も x に依存する量で、この 3 変数が独立ではありません。もはや、何が x 方向の微分係数なの？という量を算出してしまうのです。これを、算出する微分積分の手法は全問（3）の問題文で紹介した関係を使います。

しかし、$\frac{\partial r}{\partial x}$ **のような偏微分は、完全に従属変数 $=f(\{$ 独立変数群 $\})$ という形に直してから計算する事が鉄則です**。これなら、間違えがありません。つまり、この問題の場合は式（4）〜（6）を得てから微分計算を行うことになります。

（5）

$$\frac{\partial^2 r}{\partial r\partial x}=r^{(rx)}=\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}=\text{[式（13）より]}=\frac{\partial}{\partial r}\frac{r\sin\theta\cos\phi}{r}=0, \tag{16}$$
$$\frac{\partial^2\theta}{\partial\theta\partial x}=\theta^{(\theta x)}=\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial x}=\text{[式（14）より]}=\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{\cos\theta\cos\phi}{r}=-\frac{\sin\theta\cos\phi}{r}=-\frac{x}{r^2}, \tag{17}$$
$$\frac{\partial^2\phi}{\partial\phi\partial x}=\phi^{(\phi x)}=\frac{\partial}{\partial\phi}\frac{\partial\phi}{\partial x}=\text{[式（15）より]}=\frac{\partial}{\partial\phi}\frac{\sin\phi r\sin\theta}{r}=-\frac{\cos\phi}{r\sin\theta}. \tag{18}$$

$r^{(rx)},\theta^{(\theta x)},\phi^{(\phi x)}$ 以外の、全 27 通りの $p^{(p'g)}(p,\ p'=r,\theta,\phi;\ g=x,\ y,\ z)$ を表 2 にまとめます。

表 2: $p^{(p'g)}\{g=x,y,z\ \ p,p'=r,\theta,\phi\}$ の計算

p		$r^{(p'g)}$			$\theta^{(p'g)}$			$\phi^{(p'g)}$		
g		x	y	z	x	y	z	x	y	z
p'	r	0	0	0	$-\frac{\cos\theta\cos\phi}{r^2}$	$-\frac{\cos\theta\sin\phi}{r^2}$	$\frac{\sin\theta}{r^2}$	$\frac{\sin\phi}{r^2\sin\theta}$	$-\frac{\cos\phi}{r^2\sin\theta}$	0
	θ	$\cos\theta\cos\phi$	$\cos\theta\sin\phi$	$-\sin\theta$	$-\frac{\sin\theta\cos\phi}{r}$	$-\frac{\sin\theta\sin\phi}{r}$	$-\frac{\cos\theta}{r}$	$\frac{\cos\theta\sin\phi}{r\sin^2\theta}$	$-\frac{\cos\theta\cos\phi}{r\sin^2\theta}$	0
	ϕ	$-\sin\theta\sin\phi$	$\sin\theta\cos\phi$	0	$-\frac{\cos\theta\sin\phi}{r}$	$\frac{\cos\theta\cos\phi}{r}$	0	$-\frac{\cos\phi}{r\sin\theta}$	$-\frac{\sin\phi}{r\sin\theta}$	0

（問題 2（5）終わり）

（6）

式（12）より、

$$
\begin{aligned}
\triangle &= \frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2} \\
&= \left\{r^{(x)}\right\}^2\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\left\{\theta^{(x)}\right\}^2\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}+\left\{\phi^{(x)}\right\}^2\frac{\partial^2}{\partial \phi^2}+2r^{(x)}\theta^{(x)}\frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta}+2r^{(x)}\phi^{(x)}\frac{\partial^2}{\partial r\partial\phi}+2\theta^{(x)}\phi^{(x)}\frac{\partial^2}{\partial\phi\partial\theta} \\
&+ \left\{r^{(x)}r^{(rx)}+\theta^{(x)}r^{(\theta x)}+\phi^{(x)}r^{(\phi x)}\right\}\frac{\partial}{\partial r}+\left\{r^{(x)}\theta^{(rx)}+\theta^{(x)}\theta^{(\theta x)}+\phi^{(x)}\theta^{(\phi x)}\right\}\frac{\partial}{\partial\theta}+\left\{r^{(x)}\phi^{(rx)}+\theta^{(x)}\phi^{(\theta x)}+\phi^{(x)}\phi^{(\phi x)}\right\}\frac{\partial}{\partial\phi} \\
&+ \left\{r^{(y)}\right\}^2\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\left\{\theta^{(y)}\right\}^2\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}+\left\{\phi^{(y)}\right\}^2\frac{\partial^2}{\partial \phi^2}+2r^{(y)}\theta^{(y)}\frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta}+2r^{(y)}\phi^{(y)}\frac{\partial^2}{\partial r\partial\phi}+2\theta^{(y)}\phi^{(y)}\frac{\partial^2}{\partial\phi\partial\theta} \\
&+ \left\{r^{(y)}r^{(ry)}+\theta^{(y)}r^{(\theta y)}+\phi^{(y)}r^{(\phi y)}\right\}\frac{\partial}{\partial r}+\left\{r^{(y)}\theta^{(ry)}+\theta^{(y)}\theta^{(\theta y)}+\phi^{(y)}\theta^{(\phi y)}\right\}\frac{\partial}{\partial\theta}+\left\{r^{(y)}\phi^{(ry)}+\theta^{(y)}\phi^{(\theta y)}+\phi^{(y)}\phi^{(\phi y)}\right\}\frac{\partial}{\partial\phi} \\
&+ \left\{r^{(z)}\right\}^2\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\left\{\theta^{(z)}\right\}^2\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}+\left\{\phi^{(z)}\right\}^2\frac{\partial^2}{\partial \phi^2}+2r^{(z)}\theta^{(z)}\frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta}+2r^{(z)}\phi^{(z)}\frac{\partial^2}{\partial r\partial\phi}+2\theta^{(z)}\phi^{(z)}\frac{\partial^2}{\partial\phi\partial\theta} \\
&+ \left\{r^{(z)}r^{(rz)}+\theta^{(z)}r^{(\theta z)}+\phi^{(z)}r^{(\phi z)}\right\}\frac{\partial}{\partial r}+\left\{r^{(z)}\theta^{(rz)}+\theta^{(z)}\theta^{(\theta z)}+\phi^{(z)}\theta^{(\phi z)}\right\}\frac{\partial}{\partial\theta}+\left\{r^{(z)}\phi^{(rz)}+\theta^{(z)}\phi^{(\theta z)}+\phi^{(z)}\phi^{(\phi z)}\right\}\frac{\partial}{\partial\phi}
\end{aligned}
$$

整理すると、

$$
\begin{aligned}
&= \left[\{r^{(x)}\}^2+\{r^{(y)}\}^2+\{r^{(z)}\}^2\right]\frac{\partial^2}{\partial r^2} \\
&+ \left[\{\theta^{(x)}\}^2+\{\theta^{(y)}\}^2+\{\theta^{(z)2}\}\right]\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \\
&+ \left[\{\phi^{(x)}\}^2+\{\phi^{(y)}\}^2+\{\phi^{(z)}\}^2\right]\frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \\
&+ 2\{r^{(x)}\theta^{(x)}+r^{(y)}\theta^{(y)}+r^{(z)}\theta^{(z)}\}\frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta} \\
&+ 2\{\theta^{(x)}\phi^{(x)}+\theta^{(y)}\phi^{(y)}+\theta^{(z)}\phi^{(z)}\}\frac{\partial^2}{\partial\theta\partial\phi} \\
&+ 2\{\phi^{(x)}r^{(x)}+\phi^{(y)}r^{(y)}+\phi^{(z)}r^{(z)}\}\frac{\partial^2}{\partial\phi\partial r} \\
&+ \{r^{(x)}r^{(rx)}+\theta^{(x)}r^{(\theta x)}+\phi^{(x)}r^{(\phi x)}+r^{(y)}r^{(ry)}+\theta^{(y)}r^{(\theta y)}+\phi^{(y)}r^{(\phi y)}+r^{(z)}r^{(rz)}+\theta^{(z)}r^{(\theta z)}+\phi^{(z)}r^{(\phi z)}\}\frac{\partial}{\partial r} \\
&+ \{r^{(x)}\theta^{(rx)}+\theta^{(x)}\theta^{(\theta x)}+\phi^{(x)}\theta^{(\phi x)}+r^{(y)}\theta^{(ry)}+\theta^{(y)}\theta^{(\theta y)}+\phi^{(y)}\theta^{(\phi y)}+r^{(z)}\theta^{(rz)}+\theta^{(z)}\theta^{(\theta z)}+\phi^{(z)}\theta^{(\phi z)}\}\frac{\partial}{\partial\theta} \\
&+ \{r^{(x)}\phi^{(rx)}+\theta^{(x)}\phi^{(\theta x)}+\phi^{(x)}\phi^{(\phi x)}+r^{(y)}\phi^{(ry)}+\theta^{(y)}\phi^{(\theta y)}+\phi^{(y)}\phi^{(\phi y)}+r^{(z)}\phi^{(rz)}+\theta^{(z)}\phi^{(\theta z)}+\phi^{(z)}\phi^{(\phi z)}\}\frac{\partial}{\partial\phi}.
\end{aligned}
$$

ここで、$\left\{\begin{array}{l}\nabla r=(r^{(x)},r^{(y)},r^{(z)})\\ \nabla\theta=(\theta^{(x)},\theta^{(y)},\theta^{(z)})\\ \nabla\phi=(\phi^{(x)},\phi^{(y)},\phi^{(z)})\end{array}\right\}$ を定義して、上式を整理します。

$$
\begin{aligned}
&= (\nabla r)^2\frac{\partial^2}{\partial r^2}+(\nabla\theta)^2\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+(\nabla\phi)^2\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}+2\left(\nabla r\cdot\nabla\theta\right)\frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta}+2\left(\nabla\theta\cdot\nabla\phi\right)\frac{\partial^2}{\partial\theta\partial\phi}+2\left(\nabla\phi\cdot\nabla r\right)\frac{\partial^2}{\partial\phi\partial r} \\
&+\left(\nabla r\cdot\frac{\partial}{\partial r}\nabla r+\nabla\theta\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\nabla r+\nabla\phi\cdot\frac{\partial}{\partial\phi}\nabla r\right)\frac{\partial}{\partial r}+\left(\nabla r\cdot\frac{\partial}{\partial r}\nabla\theta+\nabla\theta\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\nabla\theta+\nabla\phi\cdot\frac{\partial}{\partial\phi}\nabla\theta\right)\frac{\partial}{\partial\theta}+\left(\nabla r\cdot\frac{\partial}{\partial r}\nabla\phi+\nabla\theta\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\nabla\phi+\nabla\phi\cdot\frac{\partial}{\partial\phi}\nabla\phi\right)\frac{\partial}{\partial r},
\end{aligned}
\tag{19}
$$

高度な結果を導きだす際に、計算ミスは大敵になる事が多々あります。現在の科学界は基礎に戻って地道に研究するという訓練が恣意的に欠如させられています。電磁気の授業で、大変でもこの計算を、一人一人が自分の手で解くようにすることが必須です。その時、科学というものがようやく人間の手に戻ります。しかし、このような個人の努力を怠ったならば、現在の下降スパイラルから、事態はさらにひどい事になるでしょう。

ここで、

- $(\nabla r)^2=\frac{x^2}{r^2}+\frac{y^2}{r^2}+\frac{z^2}{r^2}=1$, • $(\nabla\theta)^2=\frac{1}{r^2}\left(\cos^2\theta\cos^2\phi+\cos^2\theta\sin^2\phi+\sin^2\theta\right)=\frac{1}{r^2}$, • $(\nabla\phi)^2=\frac{1}{r^2}\left(\frac{\sin^2\phi}{\sin^2\theta}+\frac{\cos^2\phi}{\sin^2\theta}\right)=\frac{1}{r^2\sin^2\theta}$
- $\nabla r\cdot\nabla\theta=\frac{x}{r}\frac{\cos\theta\cos\phi}{r}+\frac{y}{r}\frac{\cos\theta\sin\phi}{r}-\frac{z}{r}\frac{\sin\theta}{r}=\frac{\cos\theta\sin\theta\cos^2\phi}{r}+\frac{\cos\theta\sin\theta\sin^2\phi}{r}-\frac{\cos\theta\sin\theta}{r}=\frac{\cos\theta\sin\theta}{r}-\frac{\cos\theta\sin\theta}{r}=0$
- $\nabla\theta\cdot\nabla\phi=\frac{\cos\theta\cos\phi}{r}\cdot(-\frac{\sin\phi}{r\sin\theta})+\frac{\cos\theta\sin\phi}{r}\frac{\cos\phi}{r\sin\phi}=0$, • $\nabla\phi\cdot\nabla r=-\frac{\sin\phi}{r\sin\theta}\frac{x}{r}+\frac{\cos\phi}{r\sin\theta}\frac{y}{r}=\cdots=0$
- $\nabla r\cdot\frac{\partial}{\partial r}\nabla r+\nabla\theta\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\nabla r+\nabla\phi\cdot\frac{\partial}{\partial\phi}\nabla r=\begin{pmatrix}x/r\\ y/r\\ z/r\end{pmatrix}\cdot(0,0,0)+\begin{pmatrix}\cos\theta\cos\phi/r\\ \cos\theta\sin\phi/r\\ -\sin\theta/r\end{pmatrix}\cdot\left(\cos\theta\cos\phi,\cos\theta\sin\phi,-\sin\phi\right)$
  $+\begin{pmatrix}-\sin\phi/(r\sin\theta),\\ \cos\phi/(r\sin\theta),\\ 0\end{pmatrix}\left(-\sin\theta\sin\phi,\sin\theta\cos\phi,0\right)=\cdots=\frac{\cos^2\theta}{r}+\frac{\sin^2\phi}{r}+\frac{\sin^2\phi}{r}+\frac{\cos^2\phi}{r}=\frac{2}{r}$

$$\bullet\ \nabla r\cdot\frac{\partial}{\partial r}\nabla\theta+\nabla\theta\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\nabla\theta+\nabla\phi\cdot\frac{\partial}{\partial\phi}\nabla\theta=\begin{pmatrix}x/r\\ y/r\\ z/r\end{pmatrix}\cdot\left(-\frac{\cos\theta\cos\phi}{r^2},-\frac{\cos\theta\sin\phi}{r^2},\frac{\sin\theta}{r^2}\right)+\begin{pmatrix}\cos\theta\cos\phi/r\\ \cos\theta\sin\phi/r\\ -\sin\theta/r\end{pmatrix}\cdot\left(-\frac{\sin\theta\cos\phi}{r},\frac{\sin\theta\sin\phi}{r},-\frac{\cos\theta}{r}\right)$$
$$+\begin{pmatrix}-\sin\phi/(r\sin\theta),\\ \cos\phi/(r\sin\theta),\\ 0\end{pmatrix}\left(-\frac{\cos\theta\cos\phi}{r},\frac{\cos\theta\cos\phi}{r},0\right)=\cdots=\frac{\cos\theta}{r^2\sin\theta},$$

$$\bullet\ \nabla r\cdot\frac{\partial}{\partial r}\nabla\phi+\nabla\theta\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\nabla\phi+\nabla\phi\cdot\frac{\partial}{\partial\phi}\nabla\phi=\begin{pmatrix}x/r\\ y/r\\ z/r\end{pmatrix}\cdot\left(\frac{\sin\phi}{r^2\sin\theta},-\frac{\cos\phi}{r^2\sin\theta},0\right)+\begin{pmatrix}\cos\theta\cos\phi/r\\ \cos\theta\sin\phi/r\\ -\sin\theta/r\end{pmatrix}\cdot\left(\frac{\cos\theta\sin\phi}{r\sin^2\theta},-\frac{\cos\theta\cos\phi}{r\sin^2\theta},0\right)$$
$$+\begin{pmatrix}-\sin\phi/(r\sin\theta),\\ \cos\phi/(r\sin\theta),\\ 0\end{pmatrix}(0,0,0)=\cdots=0,$$

となるので、

$$\triangle=\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}+\frac{1}{\tan\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\tag{20}$$
$$=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}+\frac{1}{\tan\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\right),\tag{21}$$

式（20）から式（21）への変換は小技ですが、実際に微分方程式を解く際には、動径方向（r）と方位角（θ,ϕ）の変数分離で重宝します。また、このラプラシアン（演算子）に作用する物理量はスカラー物理量ですが、電磁気学では電位である事を確認しておきます。

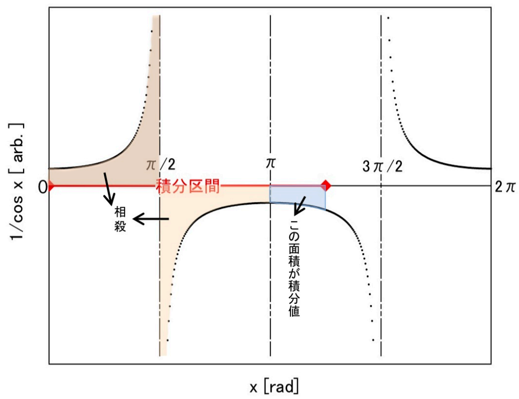
（問題２（６）終わり）

3　問題３　計算（積分 その１）

（１）不定積分 $\int\frac{1}{\cos x}dx$ を求めてください。　（２）定積分 $\int_0^{5\pi/4}\frac{1}{\cos x}dx$ の値を求めてください。

（解）

（１）　関数 $f(x)=\dfrac{1}{\cos x}$ は 2π の周期を持ち、右図の様なプロファイルで、$0\leqq x<2\pi$ の区間では $x=\frac{1}{2}\pi$ と $x=\frac{3}{2}\pi$ において発散します。



$$\int\frac{dx}{\cos x}=\int\frac{\cos x dx}{\cos^2 x}=\int\frac{\cos x dx}{1-\sin^2 x},$$

変数変換 $t=\sin x$ とすると、$\dfrac{dt}{dx}=\cos x$ ゆえに、$dt=\cos x dx$ なので、

$$\int\frac{dx}{\cos x}=\int\frac{dt}{1-t^2},$$

を得ます[1]。計算を続けます。

$$\int\frac{dx}{\cos x}=\int\frac{dt}{1-t^2}=\int\frac{dt}{(1-t)(1+t)}=\int\frac{1}{2}\{\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}\}dt=\frac{1}{2}\left(\int\frac{1}{1-t}dt+\int\frac{1}{1+t}dt\right),$$

$\boxed{\int\frac{1}{x}dx=\ln x+const}$ という積分公式をそのままあてはめる事が出来るので、

$$\int\frac{dx}{\cos x}=\frac{1}{2}\{\ln(t+1)-\ln(1-t)\}+const=\frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin x}{1-\sin x}+const.$$

[1]右辺の被積分関数は、発散する２点を除けば、$-1\leqq t\leqq 1$ となるため、必ず正の値になります。一方、左辺のもとの式の被積分関数はそれを保証しないので、オヤ？と思うかもしれません。不定積分では、積分領域を考えなくて良いので、返ってすっきりしないのですが、定積分では、この部分が、積分領域の変換を考えることによって解消されます。

（問題３（１）終わり）

（２）

（１）の解で示した図に積分区間　$[0, 5\pi/4]$ を示しました。積分区間には発散する $x = \pi/2$ が含まれていますが、積分にすれば区間 $[0, \pi/2]$ と区間 $[\pi/2, \pi]$ で相殺されるために、区間 $[0, \pi]$ での積分は 0 になります。したがって、

$$\int_0^{5\pi/4} \frac{1}{\cos x} dx = \int_{\pi}^{5\pi/4} \frac{1}{\cos x} dx,$$

となります。（１）の結果を使うと、

$$\begin{aligned}
\int_{\pi}^{5\pi/4} \frac{1}{\cos x} dx &= \left[\frac{1}{2} \ln \frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right]_{\pi}^{5\pi/4} = \frac{1}{2}\left[\ln \frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right]_{\pi}^{5\pi/4} = \frac{1}{2}\left(\ln \frac{1+\sin 5\pi/4}{1-\sin 5\pi/4} - \ln \frac{1+\sin \pi}{1-\sin \pi}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\ln \frac{1-\sqrt{2}/2}{1+\sqrt{2}/2} - \ln 1\right) = \frac{1}{2}\Big\{\ln 2(1-\sqrt{2}/2)^2 - 0\Big\} = \frac{1}{2}\Big\{\ln 2 + 2\ln(1-\sqrt{2}/2)\Big\} \\
&= \ln(1-\sqrt{2}/2) + \frac{1}{2}\ln 2 \approx -0.8814.
\end{aligned}$$

（問題３（２）終わり）

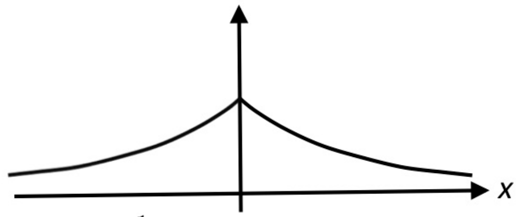
4　問題４　計算（積分　その２）

不定積分 $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+r^2}} dx, \quad (r > 0)$ を求めてください。

（解）

変数変換 $x = r\tan\theta, (-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2})$ をすれば、実数全域（$-\infty$ から ∞）の変数変換が可能です。$\frac{dx}{d\theta} = \frac{r}{\cos^2 x}$ ゆえに、

$$dx = \frac{r d\theta}{\cos^2\theta}, \tag{22}$$



$\frac{1}{\sqrt{x^2+r^2}}$ のプロファイル

となります。また、

$$被積分関数 = \frac{1}{\sqrt{r^2\tan^2\theta + r^2}} = \frac{1}{r\sqrt{\tan^2\theta+1}} = \frac{1}{r\sqrt{\cos^{-2}\theta}} = \frac{|\cos\theta|}{r}, \tag{23}$$

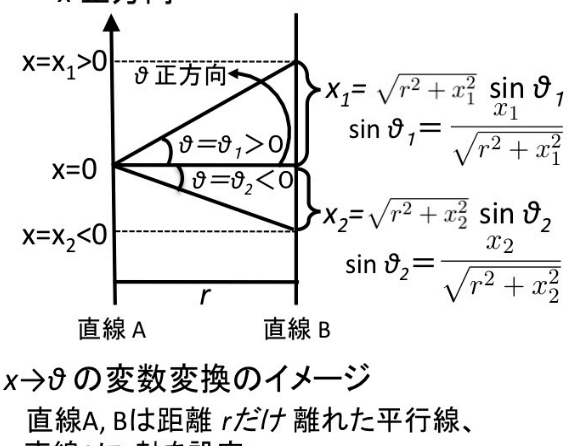
$$\therefore \quad 与式 = \int \frac{|\cos\theta|}{r}\frac{r d\theta}{\cos^2\theta} = \int \frac{d\theta}{|\cos\theta|} \;=\; \int \frac{d\theta}{\cos\theta} = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta} + const. \qquad (0 < \theta \leqq \frac{\pi}{2}), \tag{24}$$

$$= -\int \frac{d\theta}{\cos\theta} = -\frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta} + const. \quad (-\frac{\pi}{2} < \theta \leqq 0). \tag{25}$$

最後の式の積分は問題３の結果を使用しました。

ここで、変数を θ から x に戻しましょう。計算を粛々と進めれば良いのですが、この際、変数変換のイメージを正しく理解すると間違いが起きませんので、右に変数変換のイメージ図を参照して下さい。

$$\begin{aligned}
\tan\theta = \frac{x}{r} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \quad &\Rightarrow \quad \frac{x^2}{r^2} = \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{\sin^2\theta}{1-\sin^2\theta} \\
&\Rightarrow \quad x^2(1-\sin^2\theta) = r^2\sin^2 \\
&\Rightarrow \quad \sin^2\theta = \frac{x^2}{r^2+x^2} \Rightarrow \sin\theta = \frac{x}{\sqrt{r^2+x^2}} \\
&\Rightarrow \quad \cos^2\theta = \frac{r^2}{r^2+x^2} \Rightarrow \cos\theta = \frac{r}{\sqrt{r^2+x^2}},
\end{aligned}$$



x→ϑ の変数変換のイメージ

直線A, Bは距離 *rだけ* 離れた平行線、
直線Aにx軸を設定

ですから、

$$\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta} = \frac{(1+\sin\theta)^2}{(1-\sin\theta)(1+\sin\theta)} = \frac{(1+\sin\theta)^2}{(1-\sin^2\theta)} = \frac{(1+\sin\theta)^2}{\cos^2\theta} = \frac{r^2+x^2}{r^2}(1+\frac{x}{\sqrt{r^2+x^2}})^2 = \left\{\frac{\sqrt{r^2+x^2}+x}{r}\right\}^2$$

$$\begin{aligned}\therefore \int\frac{1}{\sqrt{x^2+r^2}}dx &= \pm\frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}+const. = \pm\frac{1}{2}\ln\left\{\frac{\sqrt{r^2+x^2}+x}{r}\right\}^2+const.\\ &= \underline{\ln(\sqrt{r^2+x^2}+x)-C \quad ,\ (x \geqq 0)},\\ &= \underline{-\ln(\sqrt{r^2+x^2}+x)-C \quad ,\ (x \leqq 0)},\end{aligned}$$

ただし、C は積分定数で、$const \mp \ln r$ です。

（問題４終わり）

これらの積分計算は教養の微積分レベルです。大学では数学として教授されるので物理問題と直結せず、数学が物理にどれほど生かされているのか体験する事なく卒業する人が多いのが、教育課程の改善すべき箇所です。

いくつかの積分が自力で出来るようになったら岩波全書の数学公式 I を手元に置くと、沢山の関数の微積分の計算結果が列記されていて便利です。ただ、公式集（解答書ぐらいに持っていると本当に有益です。）を正しく使いこなすためには、自分で計算を理解している必要がありますので、いくつかの有用と思われる計算を載せました。私が、この演習書を書くにあたって微分や積分計算に苦労しました。しかし、一方で、苦労して計算を追うことは、物理の全体像を理解するのに非常に有用であるという結論を得ました。きっと、晩年のガリレオが目を悪くして、書くことが難しくなった時に、様々な科学的描像を頭に浮べて考えられたのは、それまでの丁寧な思考と計算の賜物だったと感じます。是非とも、皆さんも、行間はただの計算だからとバカにせずに、様々な計算に取り組んで下さい。

5　問題５ 電場計算：無限遠に伸びる帯電導線の作る電場

帯電密度 λ[C/m] で均一に帯電している、無限に長い直線導線があります。この帯電導線を z 軸としましょう。

(1) 導線の作る電位と電場ベクトルの特徴を 1000 字程度で説明して下さい。

(2) 電位を計算してください。

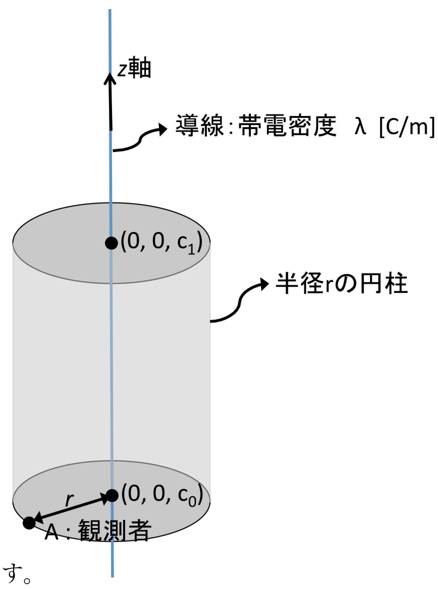
(3) 電場ベクトルを計算してください。

（解）

(1)　$z = c_0$($c_0=$定数) の平面（c_0 面）上を考えます。c_0 面上で点 $(0,0,c_0)$ を中心とする半径 r の円の円周上に観測者（A）がいるとします。この円周上から観測する場合、A がどこに立っても帯電導線の見え方に差異はありません。つまり、A は導線を見ても、自分がどの方向にいるのか区別を付けられません。

この議論は、中心を $(0,0,c_0) \to (0,0,c_1)$ に変えても同じ事です。A は、導線を観測しているだけでは、$z=c_1$ 面の半径 r の円の円周上にいるのか、c_0 面のそれにいるのか、区別をつけることが出来ません。

したがって、導線を中心軸にした半径 r の円柱（$x^2+y^2=r^2, z=[-\infty,\infty]$）の側面のどの場所から帯電導線を観測しても、帯電導線は同じように観測されます[2]。



[2]つまりは、この側面上にいる A の位置は導線観測からは特定が出来ないということになります。

よって、観測者Aの位置の電位 ϕ_A は円柱の半径 $r(=\sqrt{x^2+y^2})$ に依存し、$\phi_\mathrm{A}=\phi_\mathrm{A}(r)=\phi_\mathrm{A}(x,y)$ とすることができます。

次に、電場ベクトル $\mathbf{E}_\mathrm{A}$ は、$\mathbf{E}_\mathrm{A}=-\nabla\phi_\mathrm{A}(r)=-\nabla\phi_\mathrm{A}(x,y)$ となりますから、電場の z 成分 $E_{\mathrm{A}z}=-\partial\phi_\mathrm{A}(x,y)/\partial z=0$ と計算されます。この事から、$\mathbf{E}_\mathrm{A}=(E_{\mathrm{A},x},\ E_{\mathrm{A},y},\ 0)$ となり、帯電導線に垂直な電場ベクトルが形成されることが分ります。また、その大きさ・方向は、Aの方向が導線観測からは特定できないことから、導線に対して等方的であると考えられます。

z 軸に沿って無限に長い帯電導線ですから、z 軸の正負のどちらかに偏った電場ベクトルが発生しないという、物理的な考察と一致します。

> 注)
> 電荷の分布から、ここまでのことが考えられてしまうのです。当りを付けずに定量計算を始めるのは骨折り損のくたびれ儲けになるので注意して下さい。なかなか、考えるのが難しい場合は、数値計算の結果から考えることもありますが、それは最終手段です。
> 若い時は体力があり、とにかく物事を前に押し進めたい気持ちが先走る物です。私も力づくの計算を至高と思い、非常に頼りにしていました。この安易な行為の背景には、飛躍的なPCの計算高速化で、複雑で量の多い計算が手元の安価なマシンで行えるようになったからでしょう。
> 当時、私は物理の担当教官から、状況から判断できる物理を考える様、再三再四、注意を頂きましたが、正直な所、それがとても嫌でした。計算機が発達してなかった時代から物理に携わっていた先生は、全体像を考えずにひたすら計算を押し進める私のやり方が、行き詰まりやすく危険であることをご存知だったのだと、今になって理解した次第です。

（問題5 (1) 終わり）

(2)　観測者Aの位置を $(x,y,0)$ とします。平面 $z=0$ だけを考えれば、(1) より $c=$ 任意の実数とした $z=c$ 面は $z=0$ 面と同じになることが保証され、全空間で考えた事になります。Aの位置で帯電導線の区間 $[z,z+\Delta z]$ によって作られる電位を $\Delta\phi_r(z)$ とします。ここで、$r=\sqrt{x^2+y^2}$ です。

$$\Delta\phi_r(z)=\frac{\lambda\Delta z}{4\pi\epsilon\sqrt{r^2+z^2}}+constant\ .$$

$constant$ は帯電導線から無限遠に離れた場所、つまり $r\to\infty$ では $\Delta\phi_r(z)\to 0$ となると定義すれば、0とする事ができます。

点 $(x,y,0)$ の電位 $\phi(r)$ は $\Delta\phi_r(z)$ を帯電導線全体からの寄与になるように積分すれば良いので、

$$\phi(r)=\lim_{z_0\to\infty}\int_{-z_0}^{z_0}\Delta\phi_r(z)=\frac{\lambda}{4\pi\epsilon}\lim_{z_0\to\infty}\int_{-z_0}^{z_0}\underset{\sim\sim\sim\sim}{\frac{\Delta z}{\sqrt{r^2+z^2}}}\ ,$$

この計算は問題3の結果を使えば解けます。

$$\begin{aligned}\phi(r)&=\frac{\lambda}{4\pi\epsilon}\lim_{z_0\to\infty}\Big[\big\{\ln(\sqrt{r^2+z_0^2}+z_0)-\big\{-\ln(\sqrt{r^2+z_0^2}-z_0)\big\}\Big]\\&=\frac{\lambda}{4\pi\epsilon}\lim_{z_0\to\infty}\ln\{\sqrt{(r^2+z_0^2)^2-z_0^2)}\}=\frac{\lambda}{4\pi\epsilon}\ln r^2=\underline{\frac{\lambda}{2\pi\epsilon}\ln r}.\end{aligned}$$

波線部は無次元量の式です。始めの波線部で無次元量を積分しますので、その積分量も無次元になり、その結果として後の波線部の $\ln r$ という無次元量が出てきます。一方、ϵ の単位は [C/Vm][3]ですから λ/ϵ の単位は [V] になる事が確認できます。　また、解の電位は（１）の考察通り、r のみの関数になっている事が確認されました。

（問題5 (2) 終わり）

(3) 電場ベクトルと電位は $\mathbf{E}(r)=-\nabla\phi(r)$ という関係がありますので、

$$\mathbf{E}(r)=-\nabla\phi(r)=-\frac{\lambda}{2\pi\epsilon}\left(\frac{\partial\ln r}{\partial x},\frac{\partial\ln r}{\partial y},\frac{\partial\ln r}{\partial z}\right)=-\frac{\lambda}{2\pi\epsilon}\left(\frac{1}{r}\frac{x}{r},\frac{1}{r}\frac{y}{r},0\right)=-\frac{\lambda}{2\pi\epsilon r}\frac{1}{r}(x,y,0)=-\frac{(\lambda/\epsilon)}{2\pi r}\frac{\mathbf{r}}{r},$$

ただし、$\mathbf{r}\equiv(x,y,0)$ としました。電場ベクトル $\mathbf{E}(r)$ は、（１）の考察通り、導線に等方的（放射状）に形成され、$\mathbf{r}$ と r の関数になっている事が確認されました。

（問題5 (3) 終わり）

[3]“　静電場　”§1-1-4 の式（4）

6　問題６ 電場計算：帯電平板導体の作る電場　（コンデンサーの基礎量算出）

一様な帯電密度 $\sigma[\mathrm{C/m^2}]$ の**十分に広い導体の平面板**（面積 S）があります。

(1) この導体板の作る電場の特徴を文章で説明してください。

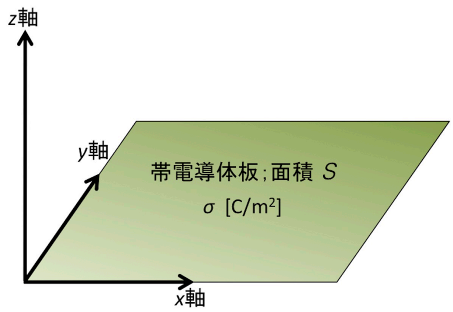
(2) 電位と電場ベクトルを計算してください。

(3) この板と同型で同質の帯電していない導体板を、距離 $d[\mathrm{m}]$ だけ離して重ねるように配置した時、コンデンサーが形成されます。コンデンサーの特性を表す電気容量 $C(Q = CV$、Q は板に帯電された電荷総量、V は両板間の電圧) と σ と導体面積 S と d の関係を数式と文章で説明してください。

(4) コンデンサーに蓄えられるエネルギーとは何のことか、説明してください。また、それを求める式を示してください。

（解）

(1)　帯電導体板内に x, y 軸を設定します。z 軸は帯電導体板に垂直な方向になります。$z = d$ 面上にいる観測者が、この帯電導体板を観測したらどこに立っても同じように観測されます。ですから、$z = d$ 面上では帯電導体板が作る電場はどこも等価になります。つまり、この帯電導体板によって作られる電場は $z = d$ に依存して x, y には依存しない事がわかります。つまり、電位は $\phi = \phi(z)$ となります。電場ベクトルは $\mathbf{E} = -\nabla\phi(z) = (0, 0, E_z)$ で z 方向に平行になります。



（問題６ (1) 終わり）

(2)　帯電導体板の表面を $z = 0$ とします。電荷が存在しない場所ではポアソンの方程式が成立します。電位は z のみの関数なので、偏微分方程式ではなく普通の微分方程式にすることが出来ます。これを書き下すと、

$$\frac{d^2\phi(z)}{dz^2} = -\frac{\sigma}{\epsilon}\delta(z),$$

この微分方程式は、

$$\frac{d\phi(z)}{dz} = -\frac{\sigma}{\epsilon},$$

となります。右辺が δ 関数だったので、積分定数は存在しません。そして、さらにこの微分方程式を解くと、

$$\phi(z) = -\frac{\sigma}{\epsilon}z + const.,$$

となります。$\phi(z)$ の基準値として、導体板の電位 $\phi(0) = 0$ と定義すると、

$$\boxed{\phi(z) = -\frac{\sigma}{\epsilon}z},$$

となります。

次に、電場ベクトルは $\mathbf{E} = -\nabla\phi(z) = (0, 0, E_z)$ ですから、

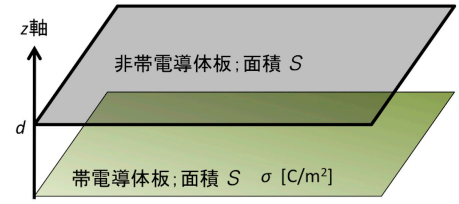
$$\mathbf{E} = -\nabla\phi(z) = (0, 0, -\frac{d\phi(z)}{dz}) = \boxed{(0,\ 0,\ \frac{\sigma}{\epsilon})},$$

となります。

（問題６ (2) 終わり）

(3)　導体板間の電位差 V は、$V=\dfrac{\sigma}{\epsilon}d$ となります。帯電導体板の電荷 Q は $Q=\sigma S$ となりますから、

$$V=Q\frac{d}{\epsilon S}\Rightarrow Q=\frac{\epsilon S}{d}V$$



となります。コンデンサーの場合は面積 S と面間隔 d は私たちがコンデンサーを設計する段階で決定される変数で、コンデンサーに対して私たちが制御する変数は電位差 ϕ（V と表記しましょう。）で、それによって電荷 Q が決定されます。つまり、Q は $S,\ d,\ V$ の従属変数と考えるべきで、電気容量 C を用いて、$Q(V)=C(S,d)V$ という記述が妥当です[4]。

電気容量 C は

$\boxed{C=\dfrac{\epsilon S}{d}}$ となり、コンデンサーが設計されたら決定される定数になります。

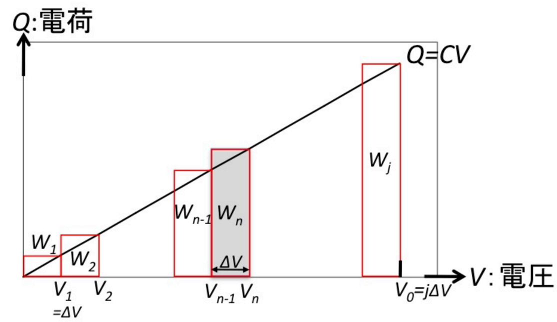
（問題 6 (3) 終わり）

(4)

コンデンサーに電位差を与えた時、コンデンサーには電場が作られます。その結果、電荷分布が局所化して、静電エネルギーが生じます。つまりコンデンサーに電位差を与える事によって、コンデンサーにエネルギーが蓄えられると考えられます。これを通称、コンデンサーに蓄えられるエネルギーと呼んでいます。

では、具体的にはどうやってそのエネルギーを定量化するか考えます。

導体板面積 S、面間隔 d のコンデンサーに電圧 0 から徐々に V_0 までの電圧をかけたとしましょう。このコンデンサーの $Q-V$ の関係は比例 $Q=CV$ の比例関係（図を参照）です。

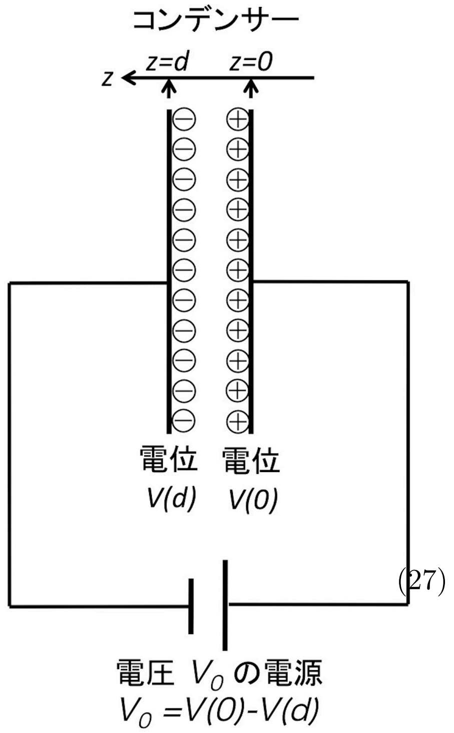


まず、電圧 V を十分に大きい自然数 j を使って $\Delta V=V_0/j$ づつ上げて行く過程を考えます。途中の n 番目の区間の電圧は $V_n=V_0\dfrac{n}{j}$ となります。

V_n から V_{n+1} へと電圧を上げた際に静電エネルギー（W）は

$$\Delta W_n\approx Q(V_n)(V_{n+1}-V_n)=CV_n\Delta V, \tag{26}$$

だけ変化します。したがって、W は W_n を $n=1\sim j$ まで足し合わせた量を ΔV を無限小（$j\to\infty$ すればよい。）にして得る事が出来ます。したがって、



$$W=\lim_{j=\infty}\sum_{n=1}^{n=j}\Delta W_n=\lim_{j=\infty}\sum_{n=1}^{n=j}CV_n\Delta V=C\int_{V=0}^{V=V_0}VdV=\frac{1}{2}CV_0^2, \tag{27}$$

が電気容量 C で設計されたコンデンサーに電圧 V_0 が掛けられた時に蓄えられるエネルギーです[5]。

（問題 6 (4) 終わり）

[4] より基本となる変数は何なのか？を常に考えましょう。この議論は当たり前で、とても重要ですが、限りある物理の時間を盾に、あまり教えられてません。歴史的に、それを踏襲してしまって、この感覚は薄れる一方だと思います。そこで、敢えて言います。

「常に自分で基本変数の確認を取るように習慣づけてください。」

時短のための公式丸暗記は発展性をなくします。割かなくてはならない時間が取れない現状は大問題です。しかし、ここにメスを入れるには、小学校からの全教育課程全を見直す必要があり、今すぐ始められても、時間がかかってしまいます。まずは、各個人が気をつける場所を気をつけるという丁寧な態度を心がけるのが被害を最小限に抑える方法だと思います。

[5] コンデンサーのエネルギーってどんな量なの？どんなエネルギーなの？とじっくりと考えることが出来る問題を作りました。

静電誘導現象

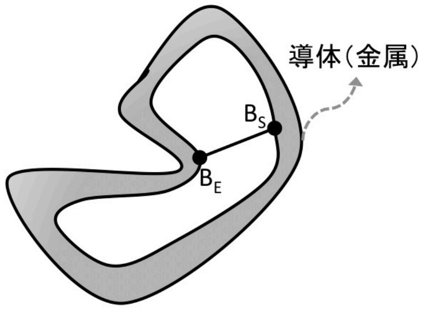
導体に帯電した物質を近づけるということは、電場の中に導体を置くという事になります。この外電場に反応して、この導体内部には電場が生じますが、これを誘起電場と呼んでいます。外電場に応じて導体内部の自由電子が電位の高い方へ移動を始め、電位差が無くなった時点で自由電子の動きが止まるのが、静電誘導現象です。結果として、誘起電場は外電場を打ち消す電場になります。

導 体 の 誘 起 電 場 の 源 は 導 体 内 の 自 由 電 子 (金 属 電 子) です。

導体（金属）とは異なる伝導物として、少量の荷電粒子しかない半導体、自由電子がない誘電体があります。これらは、電荷を近づけた時の振る舞い（一般には電気伝導性と呼んでいます。）が導体と大幅に変わってきます。しかし、あくまでも、静電誘導を起こそうとする方向で、荷電粒子が動きます。

物質の電気伝導性とは電気粒子の種類やその密度などから議論されますが、その物質の電気・磁気的性質を理解するには重要な情報です。それらはホール係数測定や電気抵抗測定などで実測されています。

静電遮蔽現象



導体殻に囲まれた空間について考えましょう。導体殻は静電場に置かれたとしても、静電誘導現象により電位が等電位になります。内面の任意の一点（B_S）から球殻内の内面の他の点（B_E）にむかって電位の変化を見ると、「電位が上がったらどこかで下る」、「電位が下ったらどこかで上がる」を任意に繰り返さないと、B_S と B_E が等電位になりません。一方、電荷のない空間では電位は一定か単調減少か単調増加になります。したがって、等電位の空間に囲まれた電荷のない閉曲面内では電位は一定とならざるおえなくなります。そして、電位が一定なら電場ベクトル＝0となり、電場ベクトルが0ならその空間に電場がないとなります。 静電場中に置かれた導体球殻は静電誘導現象で等電位になるので、導体球殻に囲まれた空間は電場ベクトルが0になる。これが静電遮蔽といわれる現象です。

7 問題７ 電場計算：均一に帯電した導体球殻の作る電場

半径が R の導体球殻があり、電荷密度 $\rho[\mathrm{Q/m^2}]$ で帯電しています。この導体球殻の中心を原点と設定しましょう。

(1) この帯電球殻が作る電位 ϕ の特徴と、電場ベクトル $\mathbf{E}$ の特徴を $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ を使って説明してください。

(2) 電位 ϕ を計算して下さい。

(3) 電場ベクトル $\mathbf{E}$ を計算してください。

（解）

(1) 原点を中心とした半径 r の仮想球面上に観測者 (A) が立った場合、どこに立っても帯電導体球殻は同じに見えます。つまり、この仮想球面上の電場は、どの位置でも、この導体球殻に対しては一様に形成されると考えられます。つまり、導体球の中心の原点 O に対しては、球対称な電場が形成されると考えられます[6]。

したがって、**電位 ϕ はこの仮想球面では同じ値になり、r にのみ依存すると考えられます。**ここで、$\phi = \phi(r)$ と記述しましょう。

電場ベクトル $\mathbf{E}$ はその定義が $\mathbf{E} = -\nabla\phi(r)$ です。ここで、A がいる位置を $\mathbf{r} = (0, 0, z)$ としましょう。$r = |\mathbf{r}| = |z|$ ですから、

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E} &= -\nabla\phi(r) = -\nabla\phi(|z|) \\
&= -\left(\frac{\partial\phi(|z|)}{\partial x}, \frac{\partial\phi(|z|)}{\partial y}, \frac{\partial\phi(|z|)}{\partial z}\right) = (0, 0, E_z) // z \text{ 軸 } // \mathbf{r},
\end{aligned}
$$

$$
|E_z| = \left|\frac{\partial\phi(|z|)}{\partial z}\right| = \left|\frac{\partial\phi(r)}{\partial r}\right| = |E(r)|,
$$

[6] この仮想球面は、導体球殻の内側にも外側にも設定ができます。

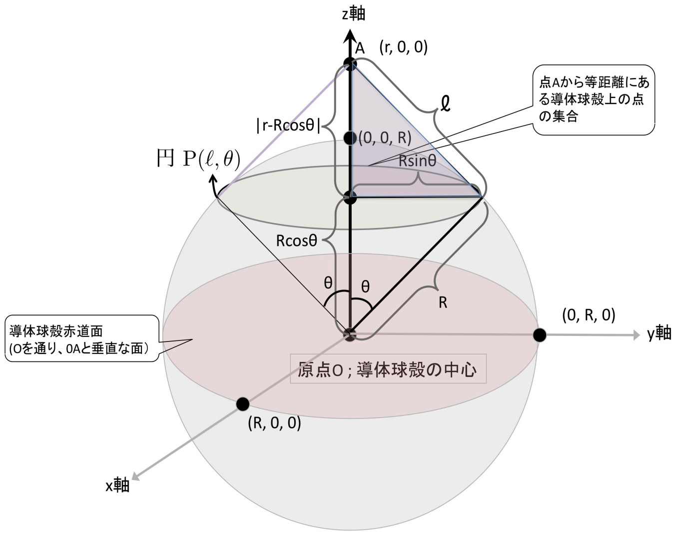
と計算される事から、**電場ベクトルは、その向きが原点と観測点を結ぶ線分の方向で、大きさは原点からの距離 r にのみ依存する事が導けます**。

電場は帯電球殻（と原点）に対して仮想球面上はどこでも一様ですから、仮想球面上の全ての点での電場ベクトルは、その位置ベクトル $\mathbf{r}$ の方向を向く事になります。つまり、$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \pm|\mathbf{E}(r)|\dfrac{\mathbf{r}}{r}$ と記述できることになります。

赤い字の部分は必須記述事項です。　[問題７（１）終了]

(2)　A を（１）と同様に $(0, 0, r)$ とします。すなわち、OA が z 軸になります。導体球殻上の任意の点を P とし、第１図のように偏角 θ=∠ AOP を定義します。この時、$\overline{\mathrm{AP}} = \ell$ とします。

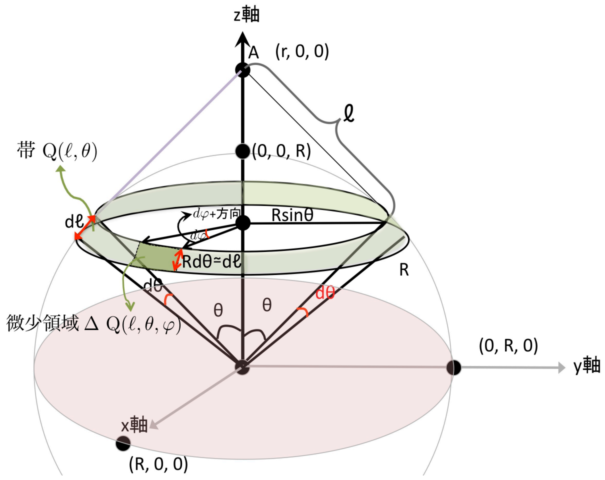
点 P（導体球殻上で $\overline{\mathrm{AP}} = \ell$ となる点）の集合は円になります（第１図参照）。この集合を集合 $\mathrm{P}(\ell, \theta)$ と記述します[7]。集合 $\mathrm{P}(\ell, \theta)$ は半径が $R\sin\theta$、z 軸と $R\cos\theta$ で交わる xy 平面に平行な円です。集合 $\mathrm{P}(\ell, \theta)$ と A によって、母線が ℓ の円錐を作る事が出来ます。母線は $\ell^2 = (R\cos\theta - r)^2 + (R\sin\theta)^2$ で与えられます。



（第１図）設定座標軸と各種定義と円 $\mathrm{P}(\ell, \theta)$

ここで、微少量 $d\ell$ と $d\theta$ を考えます（第２図参照）。集合 $\mathrm{P}(\ell, \theta)$ の円と集合 $\mathrm{P}(\ell + d\ell, \theta + d\theta)$ の円が作る領域は幅が $R \cdot d\theta$ の帯と近似できます。この帯を $\mathrm{Q}(\ell, \theta)$ とします。z 軸を回転軸とした角度変数 φ が φ から $\varphi + d\varphi$ の $\mathrm{Q}(\ell, \theta)$ の微少領域を Δ $\mathrm{Q}(\ell, \theta, \varphi)$ としましょう[8]。Δ $\mathrm{Q}(\ell, \theta, \varphi)$ の面積は $R^2 \sin\theta d\varphi d\theta$ から、Δ Q が A に作る電位 $\Delta\phi_A(r)$ は、 無限遠を電位 0 と定義して、

$$\begin{aligned}\Delta\phi_A(r) &= \frac{\sigma \cdot R^2 \sin\theta d\varphi d\theta}{4\pi\epsilon \cdot \ell} = \frac{\sigma \cdot R^2}{4\pi\epsilon}\frac{\sin\theta d\varphi d\theta}{\ell} \\ &= \frac{\sigma \cdot R^2}{4\pi\epsilon}\frac{\sin\theta d\varphi d\theta}{\sqrt{R^2 + 2Rr\cos\theta + r^2}}.\end{aligned}$$



（第２図）帯 $\mathrm{Q}(\ell, \theta)$ と微少領域 Δ $\mathrm{Q}(\ell, \theta, \varphi)$

球殻全体が点 A に作る電位 $\phi_A(r)$ を求めるためには、$\Delta\phi_A(r)$ を $d\theta$ と $d\varphi$ で積分します。

$$\begin{aligned}\phi_A(r) &= \int_\theta \int_\varphi \Delta\phi_A(r) \\ &= \frac{\sigma \cdot R^2}{4\pi\epsilon}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \frac{\sin\theta d\theta}{\sqrt{R^2 + 2Rr\cos\theta + r^2}} \\ &= \frac{\sigma \cdot R^2}{4\pi\epsilon} \cdot 2\pi \int_0^{\pi} \frac{-(-\sin\theta)d\theta}{\sqrt{R^2 + 2Rr\cos\theta + r^2}}.\end{aligned}$$

上式に対して、変数変換 $t = \cos\theta$ をします。$dt/d\theta = -\sin\theta$ 。ゆえに、$dt = -\sin\theta d\theta$、これに伴い、積分区間は $\theta = [0,\ \pi]$ から $t = [1,\ -1]$ に変換されます。

$$\phi_A(r) = \frac{\sigma \cdot R^2}{2\epsilon}\int_{-1}^{1} \frac{-(-\sin\theta)d\theta}{\sqrt{R^2 + 2Rrt + r^2}} = \frac{\sigma \cdot R^2}{2\epsilon}\int_{-1}^{1} \frac{-dt}{\sqrt{R^2 + 2Rrt + r^2}} = \frac{\sigma \cdot R^2}{2\epsilon}\int_{1}^{-1} \frac{dt}{\sqrt{R^2 + 2Rrt + r^2}}.$$

さらに、変数変換 $T = 2Rrt$ をすれば、$dT/dt = 2Rr$、ゆえに、$dt = dT/2Rr$。これに伴い、積分区間は $t = [-1,\ 1]$ から $T = [-2Rr,\ 2Rr]$ に変換されます。

[7]集合 $\mathrm{P}(\ell)$ で円を一義的に指定できる変数は ℓ 以外に θ があります。どちらの変数でも、１つで一義的にこの点 P の集合を表す事が出来る変数です。

[8]Δ $\mathrm{Q}(\ell, \theta, \varphi)$ は $(r,\ \theta,\ \varphi)$, $(r,\ \theta + d\theta,\ \varphi)$, $(r,\ \theta,\ \varphi + d\varphi)$, $(r,\ \theta + d\theta,\ \varphi + d\varphi)$ に囲まれた長方形と考えます。

$$\phi_A(r) = \frac{\sigma \cdot R^2}{2\epsilon}\int_{2Rr}^{-2Rr} \frac{1}{\sqrt{T+R^2+r^2}}\frac{dT}{2Rr} = \frac{\sigma R}{4\epsilon r}\left[2\sqrt{T+R^2+r^2}\right]_{-2Rr}^{2Rr} = \frac{\sigma R}{2\epsilon r}\left[(R+r)-|R-r|\right].$$

設定した幾何学的配置は球殻内外の区別はなかったので、

$$\phi_A(r) = \frac{\sigma R}{2\epsilon r}\left[(R+r)-|R-r|\right] \tag{28}$$
$$= \frac{\sigma R}{\epsilon} \qquad (r \leqq R;\ \text{導体球殻内}), \tag{29}$$
$$= \frac{\sigma R^2}{\epsilon r} \qquad (r \geqq R;\ \text{導体球殻外}), \tag{30}$$

となります。

[問題７（２）終了]

(3)　点 A=(0, 0, r) での電場ベクトル $\mathbf{E}$ は $\mathbf{E} = -\nabla\phi_A(r)$ です。これに式（29）と式（30）を代入して計算します。

$\boxed{\text{球殻内}}$　式（29）は全て定数からなり r の関数ではありません。したがって、

$$\underline{\mathbf{E} = -\nabla\phi_A(r) = 0},$$

になります。球殻内では電場ベクトルは 0 という、導体球殻の静電遮蔽効果が数式で得られました。

$\boxed{\text{球殻外}}$

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi_A(r) = -\frac{\sigma R^2}{\epsilon}\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{r}\quad \frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{r}\quad \frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{r}\right) = \underline{\frac{\sigma R^2}{\epsilon r}\frac{\mathbf{r}}{r}}.$$

(1) で考察した通りの電場ベクトルの大きさで、$E(r) = \dfrac{\sigma R^2}{\epsilon r}$ となりました。

[問題７（３）終了]

注)
導体球殻表面に均一な電荷分布を与えると、球殻内の電場ベクトルが 0 になるという事が、計算で証明されました。
つまり、導体球殻表面に均一な電荷分布は、球殻内が静電遮蔽された状態になっていると言う事です。この問題を裏返して考えると、導体球殻に Q という電荷を与えた時、静電誘導現象を満足させる**電荷分布は、表面に均一**であるということです。
もし、これが球ではなく、いびつな形であれば、最外面に電荷が分布する事は同じでも、殻に囲まれた部分の電場ベクトルが 0 にするために均一な電荷分布にはなりません。

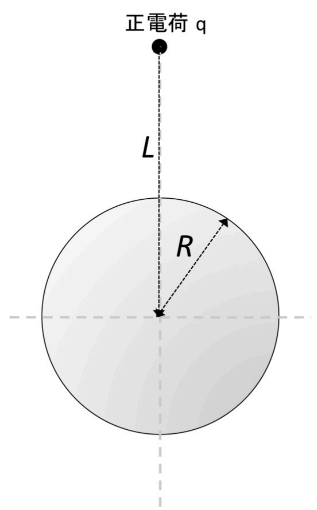
8　問題８ 帯電定性：導体球殻

半径 R[m] の導体球殻があります。

(1) この導体球殻に電荷 Q[C] を帯電させたときの電荷分布と電場の特徴を説明してください。

(2) 導体球殻は帯電していないとします。この中心から距離 $L > R$ だけ離れた場所に正の点電荷 q を置いたときの誘導電荷と電気力線を右図に従った図で描いてください。

(3) この導体球殻に電荷 Q[C]（電荷密度 ρ[Q/m^2]）を帯電させます（問題７の状態）。球殻外に点電荷 q を置いた場合の、導体球と電荷の振る舞いを述べてください。



（解）

（１）　導体球殻を等電位にするための電荷分布は、球殻表面の均一電荷です（問題７の結果、注参照）

したがって、電荷分布は導体球殻表面で均一で、その分布密度σは$\sigma = Q/4\pi R^2$になります。また、与えられた電荷は球殻の最表層に分布し、表面に沿って動かない（静止状態）ので、表面接線方向の電場ベクトル成分は0になりますので、電場ベクトルは導体球殻の表面に対して垂直です[9]。　この帯電球殻が、球殻外の点Aに作る電位ϕ(A)は、

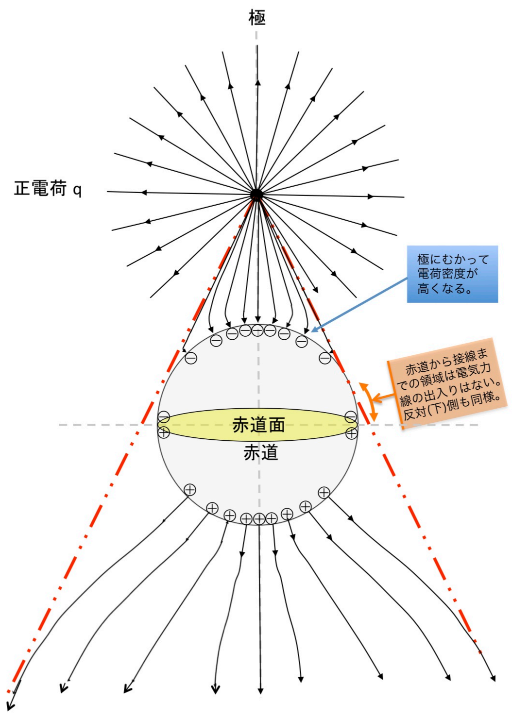
$$\phi(A) = \frac{\sigma R^2}{\epsilon r} = \frac{4\pi R^2 \sigma}{4\pi\epsilon}\frac{1}{r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon}\frac{1}{r},$$

と表式されます(問題７（２）の電位式（30）より)。第３式の分子の$4\pi R^2\sigma$は全電荷量ですから、第４式ではQと置きました。これはまさしく点電荷が作る電場の電位の式（静電場、§1.1.4 の式（２４））です。つまり、帯電球殻は外側から観測すると総帯電荷Qの点電荷と等価になります[10]。

これは観測点が十分に遠いという必要はありません。電場の観測だけでは帯電球殻か点電荷かは見分けがつかないことになります。

[問題８（１）終了]

（２）解答図は右図。少し、線が曲がってしまいました。図中の２点をおさえて下さい。



[問題８（２）終了]

（３）　初期の帯電球殻は内部の電場ベクトルが0になるように、球面外側に帯電粒子が均一に分布しています（帯電分布１）。点電荷qを配置する事によって、この帯電導体球殻の電荷分布が変わりますが、点電荷により作られる電場を打ち消すように導体球殻に誘導電荷が発生し、なおかつ、その誘起電荷の総和は0になります。つまり、静電遮蔽効果がおこるので、点電荷qにより生じる外部の電場変化をこの導体球殻は感じないという状況と等価なのです。よって、球殻外から観察したら、電荷qによる誘導電荷は、球殻の帯電状態に影響を及ぼさないように見えるのです。そのため、帯電分布１は崩される事がないと考えられ、導体球殻の中心に総電荷Qの点電荷があると見なす事ができるのです。したがって、この導体球殻と点電荷の間にはクーロン力$\dfrac{qQ}{4\pi\epsilon L^2}$が働く事になります[11]。

[問題８（３）終了]

[9] これは問題７（３）の結果と一致します。

[10] 視点；問題８（１）4 カ所の二重下線部は必須事項で 4 点満点です。波線部が書けていたら”Excellent 点”として 1 点です。

[11] 視点；問題８（３）2 カ所の二重下線部は必須事項で 2 点満点です。

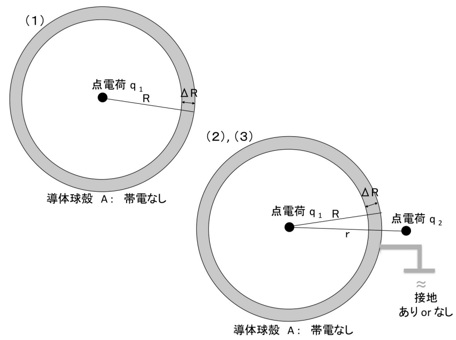
9　問題９ 電場定性：球殻導体中心の点電荷と電場

帯電していない導体球殻 A（外殻半径 R）の中心に正の点電荷 $q_1 > 0$ を置きます。球殻の厚さ ΔR は R に比べて十分に小さいとします。

(1) この系の電場ベクトルを図に描いて２００字程度で説明を記してください。

(2) 導体球殻 A を接地した場合、作られる電場ベクトルを図に描いて２００字程度で説明してください。

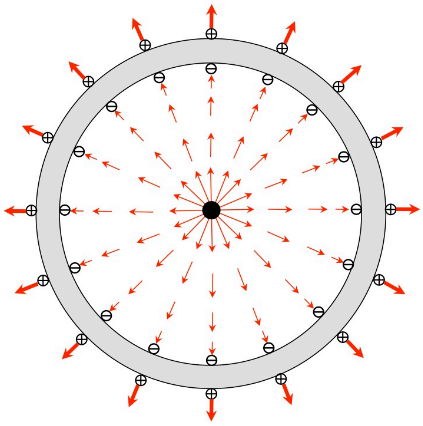
(3) この点電荷から距離 $r(> R)$ の位置に点電荷 q_2 があります。この３つの物体の動きを、接地がある場合とない場合で説明してください。



（解）

（１）中心電荷q_1により、導体球殻内面に誘起電荷$-q_1$が一様に分布します。
導体球殻だけを考えると、総電荷量は0になりますから、導体球殻外面はq_1の一様な電荷分布が生じた状態になります。

電場の分布は、正電荷q_1から導体球殻内面までは点電荷q_1の作る電場ベクトル（外向き）、導体球殻内では、静電誘導現象により、電場ベクトルは０、導体球殻外では点電荷q_1の作る電場ベクトル（外向き）になります[a]。

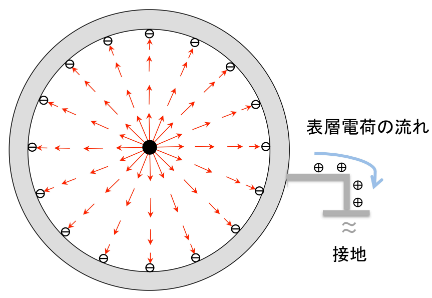


導体球殻　A:誘起電荷の合計は0
⊕ 誘起された正電荷
⊖ 誘起された負電荷

[a]視点）5 カ所の下線部は必須事項で 5 点満点としたら、赤字の部分のキーワードが抜けた場合は 0.5 点の加点になります。

[問題９（１）終了]

（２）正電荷q_1と導体球殻内部の誘起電荷は、両者ともクーロン力で引き合っています。　しかし、導体球殻外面に分布した誘起正電荷は引き合うものがなく、抑えるものがないため、接地線を通って逃げてしまいます。この結果、球殻外面の正電荷がなくなり、球殻外は電場がなくなります。　したがって、接地する事により、導体球殻内部にある電場が外部へと漏れません。これによって、この系は、導体球殻内部から外部への静電遮蔽となります。[a]。



導体球殻　A:誘起電荷の合計は0
⊕ 誘起された正電荷は抑える力がなく地面に流される。
⊖ 誘起された負電荷

[a]視点）4 カ所の下線部は必須事項で 4 点満点です。

[問題９（２）終了]

（３）導体球殻によって静電遮蔽されているため、球殻内部に外部の電荷q_2による電場は存在しません。 したがって、導体球殻に接地の有無に関わらず、電荷q_2からq_1に直接に力が働く事はありません。

接地がある場合は、電荷q_1と誘導電荷の総量は0になり、さらに導体球殻から電場ベクトルが外部に形成されることもありませんから、電荷q_2の電場によって導体球殻はクーロン力を感じません。

接地がない場合は、電荷q_1と誘導電荷の総量はq_1は導体球殻に存在する事になりますので、電荷q_2の電場によって導体球殻が動きます。 そのクーロン力は球殻中心に電荷q_1が存在する場合となり、$\dfrac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon r^2}$となります[a]。

[a]視点）6 カ所の下線部は必須事項で 6 点満点です。

[問題９（３）終了]

10　問題１０　電場計算：均一に帯電した導体球

電荷密度 $\rho[\mathrm{Q/m^3}]$ で一様に帯電している半径 R の導体球の作る電位と電場ベクトルを求めてください。

ヒント）　ガウスの法則の電場決定

電荷分布（空間中の電荷分布）と電場を結びつける法則がガウスの法則でした。これはクーロンの法則から導びかれます。クーロンの法則が静電場の最も基本的な法則です。そして、渦無しの法則もクーロンの法則から導びかれます。３者は対等ではありません。クーロン法則→ガウス法則と渦なし法則の序列があります（“静電場 ”§ ３－１ガウスの法則と渦なしの法則　参照)。

ガウスの法則の微分形は、電荷分布が与えられたなら、電場が決定されるという法則です。補足として、完全に決定したいなら、境界条件（無限遠で電位０などなど）が必要です。

次に、逆の議論を考えましょう。その場合の命題は「空間の電位もしくは電場ベクトルが全て求められたなら、電荷分布は完全に決定出来る。」となります。これは真です。電荷分布とそれによる電場の対応は一対一になるからです。ただし、一部の電場情報しか与えられなければ、正しい電荷分布が求まらない例を問題８（１）波線部で指摘しています。

（解）

電荷分布が半径 R の球の中を一様に分布しているので、等方的な電荷分布です。したがって、これによる電位 ϕ と電場ベクトル $\mathbf{E}$ も球の中心に対して等方的になります。つまり、ϕ も $\mathbf{E}$ も、この球の中心を原点と置いた極座標表示では r のみの関数となり、角度変数 θ や φ の関数にはなりません。

ガウスの法則を使って、この問題を解きましょう。この電荷分布に対応するポアソンの微分方程式は、

$$\triangle\phi(r) \quad = \quad -\frac{\rho}{\epsilon}, \tag{31}$$

となります。問題２の式（21）を使って、変数を $(x, y, z) \Rightarrow (r, \theta, \varphi)$ のポアソン方程式に書き換えます。この時、θ,φ 依存がないということは、この変数の微分値は常に０になるので、

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}r^2\frac{d}{dr}\phi(r) = -\frac{\rho(r)}{\epsilon} \qquad \rho(r) = \begin{cases} \rho & (0 \leqq r \leqq R) \\ 0 & (r \geqq R) \end{cases}, \tag{32}$$

となります。一変数微分なので、積分記号を ∂ から d へと書き換えました。ポアソンの方程式（32）を解きます。

$$(32) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r}\phi(r) = -\frac{r^2\rho(r)}{\epsilon}, \tag{33}$$

式（33）を区間 $[r_0(>R), r]$ で積分します。ちなみに、r_0 で、指定される場所は球外です。

$$(33)\text{の左辺の積分} = \int_{r_0}^{r}\frac{d}{dr'}r'^2\frac{d}{dr'}\phi(r')dr' = \left[r'^2\frac{d}{dr'}\phi(r')\right]_{r_0}^{r} = r^2\frac{d}{dr}\phi(r) - c_1, \tag{34}$$

ただし、$c_1 = r_0^2 \cdot \dfrac{d\phi(r)}{dr}|_{r=r_0}$ としました。

$0 \leqq r \leqq R$ のポアソンの方程式（33）の右辺を計算します。

$$(33)\text{の右辺} = \int_{r_0}^{r} -\frac{r'^2\rho(r')}{\epsilon}dr' = \int_{r_0}^{R} -\frac{r'^2\cdot 0}{\epsilon}dr' + \int_{R}^{r} -\frac{r'^2\rho}{\epsilon}dr' = \left[-\frac{\rho r'^3}{3\epsilon}\right]_{R}^{r} = -\frac{\rho}{3\epsilon}(R^3 - r^3). \tag{35}$$

$r \geqq R$ のポアソンの方程式（33）の右辺を計算します。

$$(33) の右辺 = \int_{r_0}^{r} -\frac{r'^2\rho(r')}{\epsilon}dr' = \int_{r_0}^{r} -\frac{r'^2\cdot 0}{\epsilon}dr' = 0. \tag{36}$$

したがって、微分方程式（33）は式（34）〜（36）より、

$$r^2\frac{d}{dr}\phi(r) - c_1 = -\frac{\rho}{3\epsilon}(R^3 - r^3), \quad (0 \leqq r \leqq R). \tag{37}$$
$$= 0, \quad (r \geqq R). \tag{38}$$

ここで、式（37）に $r = 0$ を代入すると、c_1 の具体的な値が求まります。

$$c_1 = -\frac{\rho R^3}{3\epsilon}. \tag{39}$$

式（37）と式（38）に式（39）を代入して整理すると、

$$式（37） \Rightarrow \frac{d}{dr}\phi(r) = \frac{\rho R^3}{3\epsilon r^2} - \frac{\rho r}{3\epsilon} + \frac{c_1}{r^2} = -\frac{\rho r}{3\epsilon}, \quad (0 \leqq r \leqq R). \tag{40}$$
$$式（38） \Rightarrow \frac{d}{dr}\phi(r) = \frac{c_1}{r^2} = -\frac{\rho R^3}{3\epsilon}\frac{1}{r^2}, \quad (r \geqq R). \tag{41}$$

上式（40）、（41）は、電位の位置微分ですから、電場ベクトルの大きさ $E(r)$ になり、その方向は原点（球の中心）から放射状の方向です。

式（40）、（41）の微分方程式を積分すると、電位 $\phi(r)$ が求まります。

$$式（40） \Rightarrow \phi(r) = -\frac{\rho r^2}{6\epsilon} + c_2, \quad (0 \leqq r \leqq R). \tag{42}$$
$$式（41） \Rightarrow \phi(r) = \frac{\rho R^3}{3\epsilon}\frac{1}{r} + c_3, \quad (r \geqq R). \tag{43}$$

係数 c_3 について）式（43）において、無限遠で電位が 0 とすれば、$r \to \infty, \quad \phi(r) \to 0$ となるので、

$$c_3 = 0. \tag{44}$$

係数 c_2 について）式（42）、（43）は $r = R$ において、連続にならなくてはならないので、

$$-\frac{\rho R^2}{6\epsilon} + c_2 = \frac{\rho R^3}{3\epsilon}\frac{1}{R}, \to \quad c_2 = \frac{\rho R^2}{2\epsilon}. \tag{45}$$

よって、電位 $\phi(r)$ は、式（42）、（43）に（44）、（45）を代入することによって得られます。

$$\phi(r) = \begin{cases} -\frac{\rho r^2}{6\epsilon} + \frac{\rho R^2}{2\epsilon}, & (0 \leqq r \leqq R) \\ \frac{\rho R^3}{3\epsilon}\frac{1}{r}, & (r \geqq R) \end{cases} \tag{46}$$

電場ベクトル $\mathbf{E}(r)$ は、すでに、式（40）、（41）で与えられています。大きさは、

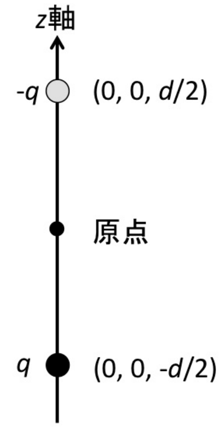
$$E(r) = \begin{cases} -\frac{\rho r}{3\epsilon}, & (0 \leqq r \leqq R) \\ -\frac{\rho R^3}{3\epsilon}\frac{1}{r^2}, & (r \geqq R) \end{cases}, \tag{47}$$

となり、方向は球の中心から放射状です。

[問題１０終了]

11　問題１１ 電気双極子の電場計算

間隔を d だけ離して置いた２つの点電荷 $q,\ -q$ があります。この２つの電荷は z 軸上にあり、正の電荷は $(0,0,-d/2)$、負の電荷は $(0,0,d/2)$ にあるとします。



(1) 電位と電場ベクトルを直交座標系の数式で表してください。

(2) $(1+t)^{\alpha}$ の $(\alpha,\ t) = (-3/2,\ 0.1),\ (-3/2,\ 0.05)$ における計算機値は 0.8668, 0.9294 です。下記の手順に沿って、下表を完成させて下さい。

① 一次近似式；$(1+t)^{\alpha} \cong 1+\alpha t$,　二次近似式；$(1+t)^{\alpha} \cong 1+\alpha t+\frac{\alpha^2}{2}x^2$ を使って、各 $(\alpha,\ t)$ の４つの近似値を計算して下さい。

② その各近似値の計算機値に対する解析精度の百分率（ | 近似値 − 計算機値 |/ 計算機値 ×100）を求めて下さい。

③5 %、1 %の実験精度のあるデータについて解析精度が適応可能を◯、適応可能ギリギリを△、適応不可を×を書き入れて下さい。

(1+t)$^{\alpha}$ (α, t)	近似値		解析精度[%]	実験精度	
				5%	1%
(−1.5, 0.1)	1次近似				
計算機値:0.8668	2次近似				
(−1.5, 0.05)	1次近似				
計算機値:0.9294	2次近似				

(3) 二次近似までの電場ベクトルを求めてください。そして、d と r によって与えられる近似式の精度について、また r と電場ベクトルの関係について考えを述べて下さい。

(解)

（１）任意の場所 (x,y,z) での電位 $\phi(x,y,z)$ は、

$$\phi(x,y,z) = \underline{\frac{q}{4\pi\epsilon}\left(\frac{1}{\sqrt{\oplus}}-\frac{1}{\sqrt{\ominus}}\right)} \tag{48}$$

ただし、

$$\oplus = x^2+y^2+\left(z+\frac{d}{2}\right)^2 \tag{49}$$

$$\ominus = x^2+y^2+\left(z-\frac{d}{2}\right)^2 \tag{50}$$

となります。

(x,y,z) での電場ベクトル $\mathbf{E}(x,y,z) = (E_x,E_y,E_z)$ は、$\mathbf{E}(x,y,z) = -\nabla\phi(x,y,z)$ です。また、$\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{\sqrt{f(x,y,z)}} = -\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{f(x,y,z)}^3}\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}$ ですので、

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{q}{4\pi\epsilon}\left(\frac{1}{\sqrt{\oplus}}-\frac{1}{\sqrt{\ominus}}\right) = \frac{q}{4\pi\epsilon}\left(-\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\oplus}^3}\frac{\partial\oplus}{\partial x}+\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\ominus}^3}\frac{\partial\ominus}{\partial x}\right) = \frac{q}{4\pi\epsilon}\left\{-\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\oplus}^3}(2x)+\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\ominus}^3}(2x)\right\} \\ &= \underline{\frac{qx}{4\pi\epsilon}\left\{\frac{1}{\sqrt{\ominus}^3}-\frac{1}{\sqrt{\oplus}^3}\right\}} \end{aligned} \tag{51}$$

$$E_y = \underline{\frac{qy}{4\pi\epsilon}\left\{\frac{1}{\sqrt{\ominus}^3}-\frac{1}{\sqrt{\oplus}^3}\right\}} \tag{52}$$

$$E_z = \underline{\frac{q}{4\pi\epsilon}\left\{z\left(\frac{1}{\sqrt{\ominus}^3}-\frac{1}{\sqrt{\oplus}^3}\right)-\frac{d}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{\ominus}^3}+\frac{1}{\sqrt{\oplus}^3}\right)\right\}}. \tag{53}$$

[問題１１（１）終了[12]]

（２） 解析精度が適応可能を○、適応可能ギリギリを△、適応不可を×とします。

$(1+t)^{\alpha}$ (α, t)	近似値		解析精度[%]	実験精度	
				5%	1%
(−1.5, 0.1)	1次近似	0.85	2	△	×
計算機値:0.8668	2次近似	0.8613	0.6	○	△
(−1.5, 0.05)	1次近似	0.925	0.5	○	△
計算機値:0.9294	2次近似	0.9278	0.2	○	○

[問題１１（２）終了[13]]

（３）$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ とします。

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{\oplus}^3} &= (r^2+zd+\frac{d}{4})^{-\frac{3}{2}}=\{r^2(1+\frac{zd}{r^2}+\frac{1}{4}(\frac{d}{r})^2)\}^{-\frac{3}{2}}\approx\{r^2(1+\frac{zd}{r^2})\}^{-\frac{3}{2}}=\frac{1}{r^3}(1+\frac{zd}{r^2})^{-\frac{3}{2}}\\ &\approx \frac{1}{r^3}\{1-\frac{3}{2}\frac{zd}{r^2}+\frac{9}{8}(\frac{zd}{r^2})^2\},\end{aligned}\tag{54}$$

第３式から４式では、$\frac{1}{4}(\frac{d}{r})^2=0$ としました。

第５式から６式では、$t=\frac{zd}{r^2}$ として、問題（２）の近似式を適用しました[14]。

同様に、

$$\frac{1}{\sqrt{\ominus}^3} = \frac{1}{r^3}(1-\frac{zd}{r^2})^{-\frac{3}{2}}\approx\frac{1}{r^3}\{1+\frac{3}{2}\frac{zd}{r^2}+\frac{9}{8}(\frac{zd}{r^2})^2\},\tag{55}$$

となるので、

$$E_x \approx \frac{3qd\cdot xz}{4\pi\epsilon r^5}=\underline{\frac{q}{4\pi\epsilon r^2}(\frac{3xz}{r^2})(\frac{d}{r})},\tag{56}$$

$$E_y \approx \frac{3qd\cdot yz}{4\pi\epsilon r^5}=\underline{\frac{q}{4\pi\epsilon r^2}(\frac{3yz}{r^2})(\frac{d}{r})},\tag{57}$$

$$E_z \approx \frac{3qd\cdot z^2}{4\pi\epsilon r^5}-\frac{qd}{8\pi\epsilon r^3}\left\{2+\frac{9}{4}\frac{z}{r}\frac{d}{r}\right\}=\underline{\frac{q}{4\pi\epsilon r^2}(\frac{3z^2}{r^2}-1)(\frac{d}{r})-\frac{q}{4\pi\epsilon r^2}(\frac{9z^2}{32r^2})(\frac{d}{r})^3}.\tag{58}$$

$d/r\approx0.1$であれば、式（58）の第２項を無視しても、第一項に対して第2項はせいぜい１％ですから、解析精度は２％以下が保証されます。以後は、この第２項を無視して議論を進めます。

赤い字の部分は点電荷 q の作る電場ベクトルの大きさと同じなので、ここでは点電荷項と呼びましょう。

青い字の部分は、式（56）で例を取って説明すると、$\frac{3xz}{r^2}=3\frac{x}{r}\frac{z}{r}=3\cos\psi\sin\theta\cos\theta$ となり、r に依存せずに角度変数 θ, φ に依存します。ですから、ここでは方向依存項と呼びます。

上記の３式は、電場ベクトルの大きさをは点電荷が作る電場ベクトルの大きさ × 方向に依存する項 × (d/r) となります。r の増大に伴って、方向依存項の値は変化しませんが、$\frac{d}{r}$ は０に近づきます。方向依存項は抜いて、おおざっぱに考えると、点電荷が作る電場ベクトルよりもd/rだけ距離による減衰が速いことが分ります。つまり、点電荷の電場よりも、電気双極子による電場の方が距離による減衰が大きいという当然の事が導きだされます。遠くから見たら、電気双極子の構成電荷が打ち消し合って電荷０の状態で観測されるということです[15]

[問題１０（３）終了]

[12]式（48），(51），(52），(53）が出来て４点満点

[13]各セルが１点です。合計で 16 点になります。

[14]$t=\frac{zd}{r^2}$ として近似式を展開を行います。この時、$\frac{zd}{r^2}=(z/r)\cdot(d/r)$ と分解したなら、第一項は [-1,1] の領域で変化するとしか言えません。一方、第２項の d/r は議論する r の領域が電荷間距離に対してどの程度かを把握する事ができます。ですから、$d/r=0.1$ なら、（２）の表 $t=0.1$ を対応させれば良いでしょう

[15]２重線部４カ所と式（56）〜（58）の３式で合計７点満点。

電気双極子は遠方に行くに従って、$\frac{d}{r}$ が減少し、正と負の両電荷が打ち消し合って電荷が存在しないような０電場を形成するのは理解できたと思います。そこで、**電気双極子は十分遠方で電荷分布が０！**と通常は記述されるわけですが、この様な強い印象づけのキャッチフレーズは微妙であるけれど重要な議論が飛んでしまうので控えるべきでしょう。

議論する電場の大きさに比べて式（56）や（57）や（58）の値がおよそ何パーセントぐらいになるかを、立ち止まって考える習慣を付けて下さい。これは面倒でもあり難解ではあるのですが、この方向性で物理を学ぶということを１００年位前の研究者は今よりもまじめにやっていたようです。これをやることにより、物理の研究ポテンシャルが高まることでしょう。

電気双極子の例としては、水素原子があります。水素原子は原子核が 1e、軌道電子が-1e の電気双極子です。しかし、固定されていない水素原子は、議論している z 軸がランダムに動き回るので、方向依存項が平均値で０となり、電気双極子としての電場は０になります。一方で、結晶の中で z 軸がある範囲に固定された状態になった時は、電気双極子の作る電場を考えなくてはなりません。z 軸が完全に固定されたとして、$d/r \sim \frac{1}{10}$ になるには、d として、原子半径 $5.3 * 10^{-11}$[m] を適用すると、$r = 5.3 * 10^{-10}$[m] となります。r は概算で約５〜１０ [Å] になりますが、これは、一般的な結晶格子間隔です。この程度の r の領域で電場を考察する場合、水素電気双極子が作る電位１Ｖ程度はあると考えて、この値が無視できるかどうかを考えれば良いのです。あくまでもおよその値ですが、習慣付けると、深い考察に繋がると思います。

〜おわり〜